Série 18

Nombres complexes: opérations algébriques

1. Mettre sous la forme $a + ib$:

(a) $(4 - i) + (2 + 3i)(1 - i)$; (c) i^n n entier ;

(b) $\dfrac{1}{3 - 2i}$; (d) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

2. Résoudre :

(a) $z^2 + 2(1+i)z - \dfrac{5}{1+2i} = 0$

en complétant le membre de gauche pour former un carré parfait ;

(b) $z^3 + 9z - 10 = 0$.

3. Résoudre :

(a) $z - i\overline{z} = 0$ et $|z| = 2\sqrt{2}$; (b) $2iz + \overline{z} = 0$ et $|z| = 2$;

4. Trouver parmi les solutions de l'équation : $(z + \overline{z})z^3 + 4(\overline{z}^2 - z^2) = 0$ celle(s) satisfaisant $2\mathrm{Re}z > |z|$.

5. On considère l'équation : $|z|^2 = \left(-\dfrac{3}{4} + bi\right) \cdot \left(\dfrac{z}{1 - z}\right)$, $b \in \mathbb{R}^+$

Déterminer b pour que cette équation ne possède qu'une solution ($\neq 0$) ;

Quelle est cette solution ?

6. Factoriser dans $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ les nombres premiers

(a) $p = 13$, (b) $p = 17$.

7. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a vu au cours que

1. $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.
2. $|z| = |\overline{z}|$.
3. $|z|^2 = z\,\overline{z}$.
4. $\overline{z\,z'} = \overline{z}\;\overline{z'}$.

Montrer à partir de ces propriétés que

5. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.
6. $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.
7. $z \neq 0 \Rightarrow |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$.
8. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
9. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.
10. $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

Solutions

S1 (a) $a = 9, \quad b = 0.$

(b) $a = \frac{3}{13}, \quad b = \frac{2}{13}.$

(c) $i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$

(d) $a = 2, \quad b = 0.$

S2 (a) $z = -i$ ou $z = -2 - i$

(b) $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -\frac{1 \pm i\sqrt{39}}{2}$

S3 (a) $z = \pm(2 + 2i)$

(b) $S = \emptyset.$

S4 $z_{\pm} = \sqrt{3} \pm i$

S5 $b = 1, \quad z = \frac{1}{2} - i.$

S6 (a) $13 = (i)^k(3 + 2i)(-i)^k(3 - 2i)$, $k = 0, 1, 2, 3$

(b) $17 = (i)^k(4 + i)(-i)^k(4 - i)$, $k = 0, 1, 2, 3$

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Est-ce que je connais les règles de calculs pour les nombres complexes?

2. Suis-je à l'aise avec la manipulation de ces règles?

3. Ai-je réussi à résoudre les équations proposées?

4. Est-ce que je vois la signification des notions de parties réelles et imaginaires?

5. Est-ce que les notions comme complexe conjugué ou module me semblent naturelles?

6. Est-ce que j'arrive à me faire à l'apparition de ce nouveau symbole i?