Série 17

3.3. Règles de calcul

1. Exprimer la fonction

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad \text{comme} \quad f(x) = a + \frac{b}{x-1}.$$

Puis, utiliser la règle de calcul d'addition des polynômes de Taylor pour trouver celui de $f(x)$ autour de $x_0 = 0$ à l'ordre n.

2. Calculer le polynôme de Taylor $P_{f,0,n}(x)$ pour

(a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (b) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

3. Calculer le polynôme de Taylor $P_{f,0,n}(x)$ pour $f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$ en écrivant $f(x)$ comme la somme de deux fonctions.

4. Utiliser la définition du polynôme de Taylor et comparer à

$$P_{\arctan,0,9}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

pour trouver les valeurs de

(a) $\arctan^{(7)}(0)$, (b) $\arctan^{(9)}(0)$.

5. On considère le polynôme de Taylor de $f(x) = \ln(\cos(x))$ à l'orde 5 autour de $x_0 = 0$:

$$P_{\ln(\cos(x)),0,5}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4.$$

Si on dérive ce $P_{f,0,5}(x)$ donné ci-dessus, on obtient le polyôme de Taylor pour quelle fonction et à quelle ordre?

6. On rappelle ici que

$$P_{\sqrt{x},1,n}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!}(x-1)^k.$$

(a) Utiliser la règle de dérivation pour trouver le $P_{\frac{1}{\sqrt{x}},1,n}(x)$.

(b) Composer pour trouver le $P_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},0,n}(x)$.

(c) Utiliser la règle d'intégration pour trouver le $P_{\arcsin,0,n}(x)$.

Solutions

S1 $P_{f,0,n}(x) = 1 - x - x^2 - \ldots - x^n$.

S2 (a) $P_{\frac{1}{1-x^2},0,n}(x) = \sum_{0\leq 2k\leq n} x^{2k}$.

(b) $P_{\frac{1}{1+x^4},0,n}(x) = \sum_{0\leq 4k\leq n} (-1)^k x^{4k}$.

S3 $P_{\ln(\frac{1+x}{1-x}),0,n}(x) = \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1}$.

S4 (a) $\arctan^{(7)}(0) = -6!$, (b) $\arctan^{(9)}(0) = 8!$.

S5 $P_{-\tan(x),0,4}(x) = -x - \frac{1}{3}x^3$.

S6 (a) $P_{\frac{1}{\sqrt{x}},1,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}(x-1)^k$.

(b) $P_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},0,n}(x) = \sum_{0\leq 2k\leq n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} x^{2k}$.

(c) $P_{\arcsin,0,n}(x) = \sum_{1\leq 2k+1\leq n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Est-ce que je connais les règles de calculs pour les polynômes de Taylor?

2. Suis-je à l'aise avec la manipulation de ces règles?

3. Ai-je compris la technique d'omettre des puissances trop grandes dans les polynômes de Taylor?

4. Ai-je compris le lien entre y_0 et x_0 dans la règle de composition?

5. Est-ce que je vois l'intérêt de ces règles de calculs?