Série 16

3.2. Termes de corrections

1. (a) Soit $x > 0$. A l'aide du terme de correction, montrer que

$$|\sin(x) - x + \frac{1}{3!}x^3| \leq \frac{1}{5!}x^5.$$

(b) Déduire du point précédent que

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{120} \leq \sin(1) \leq \frac{5}{6} + \frac{1}{120}.$$

2. (a) Soit $x > 1$. A l'aide du terme de correction, montrer que

$$|\ln(x) - (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2| \leq \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

(b) Déduire du point précédent la valeur de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

3. (a) Calculer le polynôme de Taylor $P_{f,0,n}(x)$ ainsi que le terme de reste $r_{f,0,n}(x)$ pour $f(x) = e^{-x}$.

(b) Montrer que pour $f(x) = e^{-x}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} r_{f,0,n}(x) = 0.$$

4. Exprimer le terme de correction $r_{f,0,n}(x)$ et montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\lim_{n\to\infty} r_{f,0,n}(x) = 0$$

pour

(a) $f(x) = \sin(x)$, (b) $f(x) = \sinh(x)$.

5. (a) Déterminer le développement limité, c'est -à-dire le polynôme de Taylor et le terme de correction, au voisinage de $x_0 = 0$ et à l'ordre 4 de la fonction $f(x) = \cosh(x)$:

(b) Utiliser le point précédent pour étudier si la fonction :

$$f(x) = \frac{24\cosh(x) - 24 - 12x^2 - 2x^4}{x^4}, \quad \mathrm{Def}_f = \mathbb{R}^*$$

est prolongeable par continuité au voisinage de $x_0 = 0$.

6. (a) Déterminer le polynôme de Taylor et le terme de correction de la fonction $\arcsin(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $x_0 = \frac{1}{2}$.

(b) Utiliser le point précédent pour calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}\arcsin(x) - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{6} - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2}{(x-\frac{1}{2})^2}.$$

Solutions

S2 (b) A 10^{-8} près, $\ln(1,003) \approx \frac{5'991}{2'000'000}$.

S3 (a) $P_{\exp(-x),0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{k!}$,
$r_{\exp(-x),0,n}(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-\xi)$ pour un $\xi \in]0,x[$, ou un $\xi \in]x,0[$.

S4 (a) $r_{\sin,0,n}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2})$,
pour un $\xi \in]0,x[$, ou un $\xi \in]x,0[$,

(b) $r_{\sinh,0,n}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{2}\left(e^{\xi} + (-1)^{n+1}e^{-\xi}\right)$,
pour un $\xi \in]0,x[$, ou un $\xi \in]x,0[$.

S5 (a) $\cosh(x) = \underbrace{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4}_{P_{\sinh,0,4}(x)} + \underbrace{\frac{x^5}{120}\sinh(\xi)}_{r_{\sinh,0,4}(x)}$.

(b) $f(x)$ prolongeable en $x = 0$ si on pose $f(0) = -1$.

S6 (a) $\arcsin(x) = \underbrace{\frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})^2}_{P_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x)} + \underbrace{(x - \frac{1}{2})^3\frac{1 + 2\xi^2}{6(1-\xi^2)^{5/2}}}_{r_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x)}$.

(b) la limite vaut 0.

Questionnaire d'auto-évaluation

(a) Est-ce que j'ai retenu l'expression du terme de correction?

(b) Suis-je à l'aise avec l'estimation du terme de correction?

(c) Est-ce que je fais la différene entre le polynôme de Taylor et le développement limité?

(d) Est-ce que je reconnais maintenant certains polynômes de Taylor simples ($\frac{1}{1-x}$, $\cos(x)$, $\exp(x)$, $\sinh(x)$...)?