Série 14

2.6. Fonctions puissance généralisée

1. Ecrire les expressions suivantes en terme de leur définition

(a) $\sqrt{2}^{\pi}$,

(b) π^{e},

(c) $\sin(\frac{1}{2})^{\cos(\frac{1}{3})}$,

(d) $\ln(x)^{\ln(y)}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(e.g. $\sqrt{2}^{\sqrt{3}} = \exp(\frac{1}{2}\ln(2)\sqrt{3})$)

2. Résoudre les équations suivantes :

(a) $\left(\sqrt{x}\right)^{x} = x^{\sqrt{x}}\,, \quad x > 0$

(b) $x\,(x^{x}) = x^{6/x}\,, \quad x > 0$

3. Déterminer, là où elles existent, les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

(a) $a(x) = x^{1/x}\,,$

(b) $b(x) = x^{1/\ln(x^2)}\,,$

(c) $c(x) = \left(\ln(x^2)^{\mathrm{Log}_2(x)}\right)^{\mathrm{Log}_{1/2}(x)}.$

4. Soient les nombres

$$A = e^{\pi}, \quad B = \pi^{e}.$$

Déterminez sans la calculatrice, lequel de ces deux nombres est le plus grand.

(**Indication:** Etudier la fonction $f(x) = e^x - x^e$.)

5. Résoudre :

$$(\cosh x + \sinh x)^{\mathrm{Arch} x} = (\cosh x - \sinh x)^{\mathrm{Arsh}(2-x)}\,.$$

6. Voici une nouvelle caractérisation du nombre e.

(a) A l'aide d'un argument graphique, démontrer la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}\,, \qquad \forall\, x > 0\,.$$

(b) A l'aide du théorème des deux gendarmes, déduire de l'encadrement précédent (multiplié par x), le résultat suivant :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e\,.$$

Solutions

S1 (a) $\exp(\pi \frac{1}{2} \ln(2))$.

(b) $\exp(e \ln(\pi))$.

(c) $\exp\big(\cos(\frac{1}{3}) \ln\big(\sin(\frac{1}{2})\big)\big)$.

(d) $\forall x > 1$, $\forall y > 0$, $\ln(x)^{\ln(y)} = \exp\left(\ln(y) \ln\left(\ln(x)\right)\right)$.

S2 (a) $S = \{1, 4\}$. (b) $S = \{1, 2\}$.

S3 (a) $a'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} x^{1/x}$ pour $x > 0$,

(b) $b'(x) = 0$ pour $1 \neq x > 0$,

(c) $c'(x) = -c(x) \frac{2\mathrm{Log}_2(x)}{x \ln(2)} \big(\frac{1}{2} + \ln(\ln(x^2))\big)$ pour $x > 1$.

S4 $e^{\pi} > \pi^{e}$.

S5 $S = \emptyset$.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Ai-je compris la notion de puissance généralisée?

2. Est-ce que je comprends pourquoi cette définition est l'extension à des exposants réels de la puissance rationnelle?

3. Est-ce que j'arrive à calculer en appliquant la définition de puissance généralisée?

4. Ai-je réussi à résoudre ou simplifier les (systèmes d') équations proposés, ?

5. Puis-je calculer les dérivées des fonctions puissance généralisée?

6. Suis-je en mesure de faire une étude de fonction de puissance généralisée?