Série 13

2.5. Fonctions hyperboliques et leur réciproques

1. On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$
$$\forall x \geq 1, \quad \mathrm{Arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Vérifier explicitement à partir de ces formules en logarithmes, que

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh(\mathrm{Arsh}(x)) = x,$

(b) $\forall x \geq 1, \quad \cosh(\mathrm{Arch}(x)) = x,$

2. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\ln\sqrt{\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}$;

(b) $\mathrm{Arsh}\left(xy + \sqrt{x^2y^2+y^2-x^2-1}\right),$ avec $y \geq 1$.

(**Indication:** pour le (b) poser $y = \cosh(v)$ et $x = \sinh(u)$.)

3. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 1 + 2e^y \sinh(1-x) = e^{2y} \\ \mathrm{Arsh}(\sqrt{5}x) + \mathrm{Arsh} y = \mathrm{Arsh}\frac{1}{y} \qquad \text{tel que} \quad 0 \leq x \leq y \end{cases}$$

(**Indication:** multiplier la première équation par e^{-y}).

4. Calculer les dérivées de :

(a) $\arcsin(\tanh x)$;

(b) $\arccos\left(\dfrac{1}{\cosh x}\right)$;

(c) $\mathrm{Arth}(\tan x)$;

(d) $(2x^2+1)\mathrm{Arsh}(x) - x\sqrt{1+x^2}$.

5. Dériver pour simplifier l'expression :

(a) $\mathrm{Arsh}\dfrac{x^2-1}{2x}$;

(b) $\mathrm{Arch}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

Solutions

S2 (a) x. (b) $\mathrm{Arsh}(x)+\mathrm{Arch}(y)$.

S3 $S=\{(0,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$

S4 (a) $\frac{d}{dx}\arcsin(\tanh x)=\frac{1}{\cosh x}$
(b) $\frac{d}{dx}\arccos\left(\frac{1}{\cosh x}\right)=\mathrm{sgn}(x)\frac{1}{\cosh x}$
(c) $\frac{d}{dx}\mathrm{Arth}(\tan x)=\frac{1}{\cos 2x}$
(d) $\frac{d}{dx}\left((2x^2+1)\mathrm{Arsh}x-x\sqrt{1+x^2}\right)=4x\mathrm{Arsh}x$

S5 (a) $\mathrm{Arsh}\frac{x^2-1}{2x}=\begin{cases}\ln x & \text{si } x>0\\ -\ln(-x) & \text{si } x<0\end{cases}$ (b) $\mathrm{Arch}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\begin{cases}2\mathrm{Arth}x & \text{si } 1>x\geq 0\\ -2\mathrm{Arth}x & \text{si } -1<x\leq 0\end{cases}$

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Ai-je compris la notion de fonction réciproque?

2. Est-ce que j'arrive à calculer avec les formes logarithmiques des fonctions hyperboliques réciproques?

3. Ai-je réussi à résoudre ou simplifier les (systèmes d') équations proposés, ?

4. Est-ce que j'arrive à visualiser graphiquement les fonctions hyperboliques et leur réciproques? Ai-je compris la symétrie autour de l'axe $y=x$?

5. Puis-je calculer les dérivées des fonction hyperboliques réciproques?