Corrigé de la Série 22

Equations différentielles ordinaires et linéaires de premier ordre

1. Parmi les équations différentielles suivantes, lesquelles sont des EDOL1? Lesquelles sont homogènes?

(a) $y' + x^2y = \sin(x)$.

(b) $y' + xy^2 = \cos(x)$.

(c) $(y')^2 + x^2y = 0$.

(d) $yy' + xy^2 = 0$.

(a) C'est une EDOL1 inhomogène avec $p(x) = x^2$ et $q(x) = \sin(x)$.

(b) Ce n'est pas une EDOL1 à cause de la présence du y^2.

(c) Ce n'est pas une EDOL1 à cause de la présence du $(y')^2$.

(d) Ceci est presque une EDOL1. On peut substituer y^2 par la fonction w pour obtenir $w' + 2xw = 0$. On a alors une EDOL1 homogène avec $p(x) = 2x$.

2. Résoudre les EDOL1 suivantes:

(a) $7y' + 2y = 4x$

(b) $y' + y = e^x$

Il s'agit d'équations différentielles ordinaires et linéaires de premier ordre (EDOL1). On va donc chercher les solutions à l'équation homogène $\varphi_h(x)$ et une solution particulière $\varphi_p(x)$. Les solutions seront toutes du type $\varphi(x) = \varphi_p(x) + \lambda\varphi_h(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) L'équation homogène s'écrit comme $7y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{2}{7}y = 0$. D'après la théorie, toutes les solutions seront du type $\lambda\varphi_h(x) = \lambda\exp(-\frac{2}{7}x)$.
Une solution particulière peut être trouvée après variation des constantes (comme on a pas de conditions initiales et que l'équation est définie sur tout $\mathbb{R}$, on peut sans autres prendre $x_0 = 0$).
Mais **attention!**, en divisant l'équation par 7 pour obtenir une EDOL1 du type $y' + py = q$, on doit prendre $q(x) = \frac{4}{7}x$:

$$\begin{aligned}\varphi_p(x) &= \varphi_h(x)\int_0^x \frac{q(t)}{\varphi_h(t)}dt \\ &= \exp(-\frac{2}{7}x)\int_0^x \frac{4t}{7}\exp(\frac{2}{7}t)dt\end{aligned}$$

L'intégrale se fait par intégration par parties:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{4t}{7}\exp(\frac{2}{7}t)dt &= \frac{7}{2}\frac{4x}{7}\exp(\frac{2}{7}x) - \int_0^x \frac{4}{7}\frac{7}{2}\exp(\frac{2}{7}t)dt \\ &= \exp(\frac{2}{7}x)\,(2x-7) + 7.\end{aligned}$$

On remultiplie par $\varphi_h(x) = \exp(-\frac{2}{7}x)$ et on trouve

$$\varphi_p(x) = 2x - 7 + 7\exp(-\frac{2}{7}x).$$

Ainsi, toute solution sera de la forme

$$y(x) = 2x - 7 + \lambda\exp(-\frac{2}{7}x).$$

(b) L'équation homogène s'écrit comme $y' + y = 0$. D'après la théorie, toutes les solutions seront du type $\lambda\varphi_h(x) = \lambda\exp(-x)$.
Une solution particulière peut être trouvée après variation des constantes (comme on a pas de conditions initiales et que l'équation est définie sur tout $\mathbb{R}$, on peut sans autres prendre $x_0 = 0$).

$$\varphi_p(x) = \varphi_h(x)\int_0^x \frac{q(t)}{\varphi_h(t)}dt$$
$$= \exp(-x)\int_0^x e^t\exp(t)dt = \exp(-x)\frac{1}{2}(e^{2x} - 1).$$

on trouve

$$\varphi_p(x) = \sinh(x).$$

Ainsi, toute solution sera de la forme

$$y(x) = \sinh(x) + \lambda\exp(-x).$$

3. On considère l'EDOL1

$$y' + \frac{y}{|x|} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

(a) Résoudre cette EDOL1 avec $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ sur $\mathbb{R}^*_+$.
(b) Résoudre cette EDOL1 avec $x_0 = -1$, $y_0 = 1$ sur $\mathbb{R}^*_-$.
(c) Résoudre cette EDOL1 avec $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ sur $\mathbb{R}^*$. Y a-t-il unicité des solutions?

Cette EDOL1 peut s'écrire comme $y' + py = 0$, avec $p(x) = \frac{1}{|x|}$. Cette équation est définie sur l'union disjointe des intervalles ouverts $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_+$. On s'attend donc à ce qu'il n'y ait pas unicité des solutions.

(a) Sur $\mathbb{R}^*_+$, on a

$$y(x) = y_0\exp(-\int_{x_0}^x p(t)dt) = \exp(-\int_1^x \frac{1}{|t|}dt)$$
$$\underbrace{=}_{x,t>0}\exp(-\int_1^x \frac{1}{t}dt) = \exp(-\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

(b) Sur $\mathbb{R}^*_-$, on a

$$y(x) = y_0\exp(-\int_{x_0}^x p(t)dt) = \exp(-\int_{-1}^x \frac{1}{|t|}dt)$$
$$\underbrace{=}_{x,t<0}\exp(\int_{-1}^x \frac{1}{t}dt) = \exp(\ln(|x|)) = |x| = -x.$$

(c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $y(1) = 1$, on doit prendre sur l'intervalle $\mathbb{R}^*_+$ la solution trouvée précédemment au premier point:

$$y(x) = \frac{1}{|x|}, \quad x > 0.$$

Par contre, comme on n'est pas défini en $x = 0$, on peut prendre sur $\mathbb{R}^*_-$, toute solution proportionnelle trouvée au deuxième point:

$$y(x) = -\lambda x, \quad x < 0,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, toutes les solutions (donc non uniques) sur $\mathbb{R}^*$, qui vérifient $y(1) = 1$ seront de la forme

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ -\lambda x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

4. Résoudre les EDOL1 avec conditions initiales suivantes:

(a) $y' + \tan(x)y = \sin(2x), \quad y(0) = 1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(b) $(1 + x)y' + xy = x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = 1$, sur $]-1, \infty[$.

(a) Résolution de l'équation homogène:

$$\begin{aligned}\varphi_h(x) &= \exp(-\int_0^x \tan(t)dt) = \exp(-\int_0^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt) \\ &= \exp(\int_0^x \frac{dt}{dt}\ln(\cos(t))dt) = \cos(x).\end{aligned}$$

On recherche une solution particulière par la variation des constantes:

$$\varphi_p(x) = \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(2t)}{\cos(t)}dt$$

$$= \cos(x)\int_0^x \frac{2\sin(t)\cos(t)}{\cos(t)}dt = 2\cos(x)(1 - \cos(x)).$$

La solution qui vaut 1 en $x = 0$ est alors

$$y(x) = 3\cos(x) - 2\cos^2(x).$$

(b) On commence par diviser l'équation par $(1 + x)$ pour se ramener à la forme classique d'une EDOL1:

$$y' + \frac{x}{1+x}y = 1 + x$$

Résolution de l'équation homogène:

$$\begin{aligned}\varphi_h(x) &= \exp(-\int_0^x \frac{t}{1+t}dt) = \exp(-\int_0^x \frac{1+t-1}{1+t}dt) \\ &= \exp(\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - 1\right)dt) = (1 + x)e^{-x}.\end{aligned}$$

On recherche une solution particulière par la variation des constantes:

$$\varphi_p(x) = (1+x)e^{-x}\int_0^x \frac{t+1}{(1+t)}e^t dt = (1+x)e^{-x}\left(e^x - 1\right) = (1+x)(1-e^{-x}).$$

La solution recherchée est donc

$$y(x) = (1+x)(1-e^{-x}) + (1+x)e^{-x} = 1+x.$$

5. Trouver une EDOL1 dont les solutions sont données par les fonctions

$$y(x) = \frac{C+x}{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Puisqu'une solution s'une EDOL1 a l'allure $\varphi_p(x) + \lambda\varphi_h(x)$ on va considérer que $\varphi_h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\varphi_p(x) = \frac{x}{1+x^2}$. On trouve alors

$$\frac{d}{dx}\varphi_h(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{1+x^2}\varphi_h(x),$$
$$\frac{d}{dx}\varphi_p(x) + \frac{2x}{1+x^2}\varphi_p(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

L'équation en question est donc

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}.$$

6. Trouver les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x, x' \in \mathbb{R},\ f(x+x') = f(x)f(x').$$

On remarque que $f(x) = e^{ax}$ ou $f(x) = 0$ satisferont l'équation en question. Mais avons-nous là toutes les solutions? En dérivant l'équation par rapport à x on trouve que f doit satisfaire

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad f'(x+x') = f'(x)f(x').$$

En particuliers, pour $x = 0$ on doit avoir $f'(x') = f'(0)f(x')$, de sorte que $f(x') = \lambda\exp(f'(0)x')$. En insérant cela dans l'équation initiale on trouve que $\lambda \in \{0,1\}$, de sorte que $f(x) = 0, e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$ sont effectivement les seules solutions à cette équation (remarquer que si $f = e^{ax}$, alors $f'(0) = a$).

7. Une EDOL1 se cache dans l'équation différentielle

$$\frac{xy'}{2\sqrt{y}} + 2\sqrt{y} = x^2.$$

Retrouver-là en posant $w = x\sqrt{y}$ et trouver la solution qui satisfait $y(1) = 1$.

Si $w = x\sqrt{y}$, alors $w' = \sqrt{y} + \frac{xy'}{2\sqrt{y}}$ et $\sqrt{y} = \frac{w}{x}$. L'équation se réécrit alors comme

$$w' + \frac{w}{x} = x^2.$$

Ceci est une EDOL1 avec $\varphi_h(x) = \frac{1}{x}$ et

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{t^2}{1/t}dt = \frac{1}{4}(x^3 - \frac{1}{x}).$$

La solution pour w avec $w(1) = 1\sqrt{y(1)} = 1$ est alors

$$w(x) = \frac{1}{4}(x^3 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{x}).$$

On retrouve alors y par $y = (w/x)^2$, et donc

$$y(x) = \frac{1}{16}(x^2 + \frac{3}{x^2})^2.$$