Corrigé de la Série 21

Nombres complexes: factorisation

1. Résoudre l'équation polynomiale $-x^3 - \frac{3i}{2}\,x^2 + x + \frac{i}{2} = 0$ sachant qu'elle admet un nombre imaginaire pur comme solution.

Soit $P(x) = -x^3 - \frac{3i}{2}\,x^2 + x + \frac{i}{2}$. Ecrivons la solution imaginaire $x = i\,b$ avec $b \in \mathbb{R}$.

$$P(i\,b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(i\,b)^3 - \frac{3i}{2}\,(i\,b)^2 + (i\,b) + \frac{i}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i\,b^3 + \frac{3i}{2}\,b^2 + i\,b + \frac{i}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,b^3 + 3\,b^2 + 2\,b + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b+1)\,(2\,b^2 + b + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -1\,.$$

$x = -i$ est une racine de P donc P est divisible par $(x+i)$. On effectue cette division pour obtenir

$$P(x) = (x+i)\,(-x^2 - \frac{i}{2}\,x + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\,(x+i)\,(2x^2 + i\,x - 1)\,.$$

Les deux autres racines de P sont les zéros de $(2x^2 + i\,x - 1)$, on les cherche à l'aide du discriminant Δ.

$$\Delta = 7\,, \qquad x = \frac{-i \pm \sqrt{7}}{4}\,.$$

Les trois racines de P sont donc : $x_1 = -i$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{7} - i}{4}$, $x_3 = -\dfrac{\sqrt{7} + i}{4}$.

2. Déterminer le polynôme P_3 (troisième degré) vérifiant les quatre conditions suivantes :

(a) $P_3(1) = 0$,

(b) $P_3(i) = i - 1$,

(c) le produit des racines de P_3 vaut $1 + \mathrm{i}$,

(d) la somme des racines non réelles de P_3 est égale à $1 + \mathrm{i}$.

La condition a) implique $P_3(z) = (z-1)P_2(z)$;

La condition d) implique :

- Si P_3 possède deux racines non réelles z_1 et z_2, les conditions c) et d) nous donnent:

  $1 \cdot z_1 z_2 = 1+i\,; \quad z_1 + z_2 = 1+i \quad \Rightarrow \quad P_2(z) = k(z^2 - (1+i)z + (1+i))$

  $P_3(z) = k(z-1)(z^2-(1+i)z+(1+i))$ et la condition b) nous donne :

  $P_3(i) = i-1$

  $\Leftrightarrow i-1 = k(i-1)(-1-i+1+1+i)$ d'ou $k=1$

  $P_3(z) = (z-1)(z^2-(1+i)z+(1+i)) = z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-(1+i)$

- Si P_3 ne possède qu'une racine non réelle $z = 1+i$ (de la condition d))

  $P_2(z) = k(z-(1+i))(z+a)$ et la condition b) nous donne : $P_3(i) = i-1$

  $\Leftrightarrow i-1 = k(i-1)(-1)(i-a)$ d'ou $k(a-i) = 1$

  La condition c) implique : $1 \cdot (1+i) \cdot a = (1+i) \quad \Rightarrow \quad a = 1$

  On a alors : $k = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1}{2}(1+i)$

  $P_3(z) = \dfrac{1}{2}(1+i)(z-1)^2(z-(1+i)) = \dfrac{1}{2}(1+i)z^3 - (1+2i)z^2 + \dfrac{1}{2}(1+5i)z - i.$

3. Factoriser les polynômes suivants sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$:

(a) $X^6+X^4+X^2+1.$ (b) $1-2X+4X^2-8X^3+16X^4.$

(a) C'est une série géométrique de raison X^2. On a alors, pour autant que $X^2 \neq 1$:

$$X^6+X^4+X^2+1 = \frac{1-(X^2)^4}{1-X^2} = \frac{1-X^8}{1-X^2}.$$

Les racines de $X^6+X^4+X^2+1$ seront donc les mêmes que celles de $1-X^8$, privé des valeurs telles que $X^2=1$.
Pour trouver les racines a de $1-X^8=0$ on calcule donc

$$1-a^8=0 \quad \Leftrightarrow \quad a^8=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(|a|e^{i\varphi_a}\right)^8 = e^{i\cdot 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad |a|^8 e^{i8\varphi_a} = e^{i\cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |a|^8 = 1, \\ 8\varphi_a = 0 \bmod 2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |a| = 1, \\ \varphi_a = \frac{2k\pi}{8},\ k \in \mathbb{N}_{\leq 7} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left\{e^{i\frac{k\pi}{4}} \ :\ k \in \mathbb{N}_{\leq 7}\right\}.$$

Attention! Rappelons-nous maintenant qu'il faut ôter les valeurs pour lesquels $a^2 = 1$ de cet ensemble. Cela arrive précisément quand $\frac{k\pi}{4} = 0$ ou $\frac{k\pi}{4} = \pi$, ou encore quand $k = 0$ ou $k = 4$.
Les racines de $X^6 + X^4 + X^2 + 1$ sont donc dans l'ensemble

$$\left\{ e^{i\frac{k\pi}{4}} \;:\; k = 1, 2, 3, 5, 6, 7 \right\}.$$

On a donc

$$X^6 + X^4 + X^2 + 1 = \prod_{k \in \{1,2,3,5,6,7\}} (X - e^{i\frac{k\pi}{4}}).$$

(b) C'est une série géométrique de raison $-2X$. On a alors, pour autant que $-2X \neq 1$:

$$1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + 16X^4 = \frac{1 - (-2X)^5}{1 - (-2X)} = \frac{1 + 32X^5}{1 + 2X}.$$

Les racines de $1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + 16X^4$ seront donc les mêmes que celles de $1 + 32X^5$, privé de la valeur $X = -\frac{1}{2}$.
Pour trouver les racines a de $1 + 32X^5 = 0$ on calcule donc

$$1 + 32a^5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^5 = -\frac{1}{32} \quad \Leftrightarrow \quad \left(|a|e^{i\varphi_a}\right)^5 = \frac{1}{32}e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow \quad |a|^5 e^{i5\varphi_a} = \frac{1}{32}e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |a|^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5, \\ \varphi_a = \pi \bmod 2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |a| = \frac{1}{2}, \\ \varphi_a = \frac{\pi + 2k\pi}{5}, \; k = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left\{ \frac{1}{2} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}} \;:\; k = 0, 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

Rappelons-nous maintenant qu'il faut ôter la racine $a = -1/2$ de cet ensemble. Cela arrive précisément quand $\frac{(2k+1)\pi}{5} = \pi$, ou encore quand $k = 2$.
Les racines de $1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + 16X^4$ sont donc dans l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{2} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}} \;:\; k = 0, 1, 3, 4 \right\}.$$

Il serait tentant d'écrire maintenant

$$1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + 16X^4 = \prod_{k \in \{0,1,3,4\}} (X - \frac{1}{2} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}})$$

mais **attention!**
Le polynôme de droite est normalisé, alors que celui de droite ne l'est pas: le terme de plus haut degré est $16X^4$. Il faut donc multiplier la factorisation par 16 pour obtenir

$$1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + 16X^4 = 16 \prod_{k \in \{0,1,3,4\}} (X - \frac{1}{2} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}).$$

4. Décomposer le polynôme suivant en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = X^4 - 2X^2 \cos(\alpha) + 1.$$

On a que

$$\begin{aligned} P(X) = X^4 - 2X^2\cos(\alpha) + 1 &= X^4 - 2X^2\,\mathrm{Re}(e^{i\alpha}) + 1 \\ &= \left(X^2 - e^{i\alpha}\right)\left(X^2 - e^{-i\alpha}\right) \\ &= \left(X - e^{i\alpha/2}\right)\left(X + e^{i\alpha/2}\right)\left(X - e^{-i\alpha/2}\right)\left(X + e^{-i\alpha/2}\right), \end{aligned}$$

ce qui est donc la factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
Pour obtenir la factorisation en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ il faut associer les paires conjuguées:

$$\begin{aligned} P(X) &= \left(X - e^{i\alpha/2}\right)\left(X + e^{i\alpha/2}\right)\left(X - e^{-i\alpha/2}\right)\left(X + e^{-i\alpha/2}\right) \\ &= \left(X - e^{i\alpha/2}\right)\left(X - e^{-i\alpha/2}\right)\left(X + e^{i\alpha/2}\right)\left(X + e^{-i\alpha/2}\right) \\ &= \left(X^2 - 2\cos(\alpha/2)X + 1\right)\left(X^2 + 2\cos(\alpha/2)X + 1\right). \end{aligned}$$

5. Soit le polynôme

$$P(X) = (X^2 - X + 1)^2 + 1.$$

(a) Vérifier que i est une racine de $P(X)$.

(b) Factoriser alors $P(X)$ en irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

(a) Par substitution on trouve

$$P(i) = (i^2 - i + 1)^2 + 1 = (-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

(b) Puisque $P(i) = 0$ on sait que $(X - i)$ sera un facteur de $P(X)$.

On peut alors développer la définition de $P(X)$ et procéder à une division euclidienne. Cela nous donnera un deuxième facteur (réductible) pour $P(X)$.

Ou alors, on observe que $P(X)$ est à coefficients réels, et que pa conséquent $P(-i) = 0$ aussi.

Par le binôme de Newton, une première factorisation est gratuite:

$$P(X) = (X^2 - X + 1)^2 + 1 = \underbrace{\left((X^2 - X + 1) + i\right)}_{=0 \text{ pour } X=i}\underbrace{\left((X^2 - X + 1) - i\right)}_{=0 \text{ pour } X=-i}$$

Le premier facteur se divise par $(X - i)$ et pour obtenir la factorisation, il suffit de considérer le terme constant:

$$(X^2 - X + 1) + i = (X - i)(X - 1 + i).$$

La factorisation du deuxième facteur s'obtient par conjugaison complexe:

$$(X^2 - X + 1) - i = (X + i)(X - 1 - i).$$

On obtient ainsi très économiquement la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$P(X) = (X - i)(X - 1 + i)(X + i)(X - 1 - i).$$

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ il suffit alors d'associer les facteurs conjugués l'un de l'autre:

$$\begin{aligned}P(X) = (X^2 - X + 1)^2 + 1 &= (X - i)(X + i)(X - 1 + i)(X - 1 - i)\\ &= (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2).\end{aligned}$$

6. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}_+$ le polynôme

$$P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$$

est-il le carré d'un polynôme? Factoriser $P(X)$ dans ce(s) cas sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Puisque $P(X)$ est de degré 4, à coefficients réels, normalisé et de terme constant 1, l'unique paire de candidats racine possibles doivent avoir la forme

$$R_\pm(X) = X^2 + cX \pm 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Le carré d'un tel polynôme est alors

$$(R_\pm(X))^2 = \underbrace{X^4 + c^2X^2 + 1}_{\text{termes carrés}} + \underbrace{2cX^3 \pm 2X^2 \pm 2cX}_{\text{termes croisés}}.$$

Par identification des coefficients on trouve

$$c = \pm 1, \quad a = c = \pm 1, \quad c^2 \pm 2 = b \geq 0.$$

Comme $c \pm 1$ on a $c^2 \pm 2 = 1 \pm 2$, qui ne peut être positif avec le signe $-$. Il reste comme unique solution alors

$$a = c = 1, \quad b = 3.$$

On a alors

$$P(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2.$$

Le calcul du discriminant pour $X^2 + X + 1$ donne -3. Ce polynôme est donc irréductible sur $\mathbb{R}[X]$ et on y connais donc déjà sa réduction complète.

Pour la réduction sur $\mathbb{C}[X]$, on calcule les racine de $X^2 + X + 1$:

$$a_\pm = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

On obtient alors la factorisation

$$P(X) = (X + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2})^2(X + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2})^2.$$