Corrigé de la Série 20

Nombres complexes: division euclidienne

1. Parmi les équations pour $z \in \mathbb{C}$ suivantes, déterminer si elle sont polynômiales ou non:

(a) $1 = \frac{1}{\overline{z}z}$,

(b) $z^3 - 2z + 1 = 0$,

(c) $1 = \frac{1}{2-\overline{z}z}$,

(d) $\overline{z}z + \overline{z} + z = 0$.

(a) Ce n'est pas une équation polynômiale à cause de la présence du complexe conjugué et parce qu'on divise par z.
Si on s'intéresse aux solutions de cette équation (ce qui n'est pas explicitement demandé), on doit résoudre $\overline{z}z = 1$, ou encore $|z|^2 = 1$. En représentation polaire cela revient à écrire l'ensemble solutions comme $\{e^{i\varphi\,:\,\varphi\in]-\pi,\pi]}\}$, qui n'est autre que le cercle de rayon 1, centré en $z_\Omega = 0$.

(b) Cela est une équation polynômiale.
Si on s'intéresse aux solutions de cette équation (ce qui n'est pas explicitement demandé), on remarque que $z = 1$ en est une solution manifeste. On a ensuite la factorisation $z^3 - 2z + 1 = (z-1)(z^2 + z - 1)$ et les solutions du deuxième facteur s'écrivent comme $z\pm = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(c) Ce n'est pas une équation polynômiale à cause de la présence du complexe conjugué et parce qu'on divise par z.
Si on s'intéresse aux solutions de cette équation (ce qui n'est pas explicitement demandé), on doit résoudre $2-|z|^2 = 1$, ou encore $1 = |z|^2$, ce qui est à nouveau le cercle de rayon 1, centré en $z_\Omega = 0$.

(d) Ce n'est pas une équation polynômiale à cause de la présence du complexe conjugué.
Si on s'intéresse aux solutions de cette équation (ce qui n'est pas explicitement demandé), on doit résoudre $\overline{z}z + \overline{z} + z = 0$, ou encore $\overline{z}z + \overline{z} + z + 1 = 1$, ou encore $(z+1)(\overline{z}+1) = 1$, c'est-à-dire $|z+1|^2 = 1$, ou encore $|z+1| = 1$, ou finalement $z + 1 = e^{i\varphi}$, qui n'est autre que le cercle de rayon 1, centré en $z_\Omega = -1$:

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, z = -1 + e^{i\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

2. Calculer la division euclidienne de

(a) $P(X) = X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $Q(X) = X^2 + 3X - 1$,

(b) $P(X) = X^4 + 4iX^3 + 9X^2 + 27iX + 38$ par $Q(X) = -X^2 - iX - 7$.

(a) Le tableau de la division euclidienne donne

$$
\begin{array}{r|l}
\overbrace{X^4+5X^3+12X^2+19X-7}^{P(X)} & \overbrace{X^2+3X-1}^{Q(X)} \\ \cline{2-2}
-\quad X^4+3X^3-\quad X^2 \qquad\qquad & X^2+2X+7 \\ \cline{1-1}
2X^3+13X^2+19X-7 & \\
-\quad 2X^3+\ 6X^2-\ 2X \quad\ & \\ \cline{1-1}
7X^2+21X-7 & \\
-\quad 7X^2+21X-7 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Le résultat est donc $D(X)=X^2+2X-7$ et le reste est nul.

(b) $X^4+4iX^3+9X^2+27iX+38$ par $-X^2-iX-7$. Le tableau de la division euclidienne donne

$$
\begin{array}{r|l}
\overbrace{X^4+4iX^3+9X^2+27iX+38}^{P(X)} & \overbrace{-X^2-\ iX-7}^{Q(X)} \\ \cline{2-2}
-\quad X^4+\ iX^3+7X^2 \qquad\qquad\qquad & -X^2-3iX-5 \\ \cline{1-1}
3iX^3+2X^2+27iX+38 & \\
-\quad 3iX^3-3X^2+21iX \qquad & \\ \cline{1-1}
5X^2+\ 6iX+38 & \\
-\quad 5X^2+\ 5iX+35 & \\ \cline{1-1}
iX+\ 3 &
\end{array}
$$

Le résultat est donc $D(X)=-X^2-3iX-5$ et le reste est $R(X)=iX+3$. Le reste est de degré inférieur à $Q(X)$.

3. (a) Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $R(X)$ le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)$. Exprimer $R(X)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

(b) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $R(X)$ le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)^2$. Exprimer $R(X)$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

(a) Puisqu'on divise le polynôme $P(X)$ par un polynôme $Q(X)=(X-a)(X-b)$ de degré 2, le reste $R(X)$ sera un polynôme de degré 1.
On cherche donc à déterminer les coefficients a_1 et a_0 de

$$R(X)=a_1X+a_0.$$

On sait de plus que

$$
\begin{aligned}
&P(X)=D(X)(X-a)(X-b)+R(X),\\
\Rightarrow\quad &P(a)=R(a)\ \text{ et }\ P(b)=R(b).
\end{aligned}
$$

On obtient alors

$$\begin{cases} a_1 a + a_0 = P(a), \\ a_1 b + a_0 = P(b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 a + a_0 = P(a), \\ a_1(b-a) = P(b) - P(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = P(a) - a\frac{P(b)-P(a)}{b-a}, \\ a_1 = \frac{P(b)-P(a)}{b-a} \end{cases}$$

Ainsi,

$$R(X) = \frac{P(b)-P(a)}{b-a}(X-a) + P(a).$$

(b) Puisqu'on divise le polynôme $P(X)$ par un polynôme $Q(X) = (X-a)^2$ de degré 2, le reste $R(X)$ sera un polynôme de degré 1.
On cherche donc à déterminer les coefficients a_1 et a_0 de

$$R(X) = a_1 X + a_0.$$

On sait de plus que

$$\begin{aligned} & P(X) = D(X)(X-a)^2 + R(X), \\ \Rightarrow \quad & P'(X) = D'(X)(X-a)^2 + D(X)2(X-a) + R'(X), \\ \Rightarrow \quad & P(a) = R(a) \text{ et } P'(a) = R'(a). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} a_1 a + a_0 = P(a), \\ a_1 = P'(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = P(a) - aP'(a), \\ a_1 = P'(a) \end{cases}.$$

Ainsi,

$$R(X) = P'(a)(X-a) + P(a).$$

4. Calculer le reste de la division euclidienne de

$$P(X) = (X+1)^n - X^n - 1$$

par

(a) $Q(X) = X^2 + 3X + 2$.   (b) $Q(X) = X^2 - 2X + 1$.

(a) Le polynôme $Q(X)$ se factorise comme $Q(X) = (X+2)(X+1)$. Si

$$P(X) = D(X)(X+1)(X+2) + R(X)$$

alors on voit que $P(-1) = R(-1) = (-1)^{n+1} - 1$ et $P(-2) = R(-2) = (-1)^n - (-2)^n - 1$.
$R(X)$ étant de degré 1, puisque $Q(X)$ est de degré 2, on doit alors avoir

$$\begin{aligned} R(X) &= \frac{R(-2) - R(-1)}{-2-(-1)}(X+1) + R(-1) \\ &= \left((-1)^{n+1} - 1 + (-1)^{n+1} + (-2)^n + 1\right)(X+1) + (-1)^{n+1} - 1 \\ &= \left((-2)^n + 2(-1)^{n+1}\right)(X+1) + (-1)^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

(b) Le polynôme $Q(X)$ se factorise comme $Q(X) = (X-1)^2$. Si

$$P(X) = D(X)(X-1)^2 + R(X)$$

alors on voit que $P(1) = R(1) = 2^n - 2$. De plus,

$$P'(X) = D'(X)(X-1)^2 + D(X)2(X-1) + R'(X)$$

et $P'(1) = R'(1) = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1}\big|_{X=1} = n2^{n-1} - n$.

$R(X)$ étant de degré 1, puisque $Q(X)$ est de degré 2, on doit alors avoir

$$\begin{aligned} R(X) &= R'(1)(X-1) + R(1) \quad \text{(polynôme de Taylor en } X_0 = 1) \\ &= n(2^{n-1}-1)(X-1) + 2^n - 2. \end{aligned}$$

5. Soient $P_1(X)$, $P_2(X)$, $Q(X)$ des polynômes et soient $R_1(X)$, $R_2(X)$ les restes de la division de $P_1(X)$ par $Q(X)$ et de $P_2(X)$ par $Q(X)$ respectivement. Parmi les affirmations suivantes, déterminer si elles sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

(a) Le reste de la division de $P_1(X) + P_2(X)$ par $Q(X)$ est $R_1(X) + R_2(X)$.

(b) Le reste de la division de $P_1(X) \times P_2(X)$ par $Q(X)$ est $R_1(X) \times R_2(X)$.

(c) Le reste de la division de $P_1(X)$ par $Q^2(X)$ est le reste de la division de $R_1(X)$ par $Q(X)$.

(d) Le reste de la division de $P_1(X) \times P_2(X)$ par $Q(X)$ est le reste de la division de $R_1(X) \times R_2(X)$ par $Q(X)$.

(a) Vrai.

(b) Faux. Par exemple si $P_1(X) = (X-1)$, $P_2(X) = (X-2)$ et $Q(X) = (X-1)(X-2)$, alors $R_1(X) = (X-1)$, $R_2(X) = (X-2)$, mais le reste de la division de $P_1(X) \times P_2(X)$ par $Q(X)$ est nul.

(c) Faux. Si $P_1(X) = (X-1)(X-2)$ et $Q(X) = (X-1)$, alors le reste $R_1(X) = 0$, alors que le reste de $P(X)$ par $Q(X)^2$ est $(1-X)$.

(d) Vrai. En effet, si on écrit $P_1(X) = D_1(X)Q(X) + R_1(X)$ et $P_2(X) = D_2(X)Q(X) + R_2(X)$, alors

$$P_1(X) \times P_2(X) = \underbrace{D_1(X)D_2(X)Q^2(X) + D_1(X)R_2(X)Q(X) + D_2(X)R_1(X)Q(X)}_{\text{multiple de } Q(X)} + R_1(X)R_2(X).$$

Le reste de la division de $P_1(X) \times P_2(X)$ par $Q(X)$ sera donc celui de $R_1(X)R_2(X)$ par $Q(X)$.

6. (a) Le polynôme $(X-1)^2$ divise-t-il $X^n - X^{n-1} - X + 1$?

(b) Le polynôme $(X-1)^3$ divise-t-il $2X^n + (n-n^2)X^2 + (2n^2-2n)X + n - n^2 - 2$?

(a) Pour $n \leq 1$, on ne peut évidemment pas diviser $P(X)$ par $(X-1)^2$.
Pour $n \geq 2$, en écrivant $P(X)$ comme son polynôme de Taylor autour de $X_0 = 1$, on trouve

$$P(X) = \underbrace{\frac{P^{(n)}(1)}{n!}(X-1)^n + \ldots + \frac{P^{(2)}(1)}{2!}(X-1)^2}_{\text{multiple de } (X-1)^2} + \underbrace{P'(1)(X-1) + P(1)}_{\text{non divisible par } (X-1)^2}.$$

On remarque alors que $(X-1)^2$ divise $P(X)$ ssi $P(1) = P'(1) = 0$.
Vérifions alors cela:

$$P(1) = X^n - X^{n-1} - X + 1\big|_{X=1} = 1 - 1 - 1 + 1 = 0,$$
$$P'(1) = nX^{n-1} - (n-1)X^{n-2} - 1\big|_{X=1} = n - (n-1) - 1 = 0.$$

$(X-1)^2$ divise donc $P(X)$.

(b) Pour $n \leq 2$, on ne peut évidemment pas diviser $P(X)$ par $(X-1)^3$.
Pour $n \geq 3$, en écrivant $P(X)$ comme son polynôme de Taylor autour de $X_0 = 1$, on trouve

$$P(X) = \underbrace{\frac{P^{(n)}(1)}{n!}(X-1)^n + \ldots + \frac{P^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3}_{\text{multiple de } (X-1)^3}$$
$$+ \underbrace{\frac{P^{(2)}(1)}{2!}(X-1)^2 + P'(1)(X-1) + P(1)}_{\text{non divisible par } (X-1)^3}.$$

On remarque alors que $(X-1)^3$ divise $P(X)$ ssi $P(1) = P'(1) = P^{(2)}(1) = 0$.
Vérifions alors cela:

$$\begin{aligned} P(1) &= 2X^n + (n-n^2)X^2 + (2n^2-2n)X + n - n^2 - 2\big|_{X=1} \\ &= 2 + n - n^2 + 2n^2 - 2n + n - n^2 - 2 = 0, \\ P'(1) &= 2nX^{n-1} + 2(n-n^2)X + 2n^2 - 2n\big|_{X=1} \\ &= 2n + 2n - 2n^2 + 2n^2 - 2n \neq 0, \end{aligned}$$
$$P^{(2)}(1) = 2n(n-1)X^{n-2} + 2(n-n^2)\big|_{X=1} = 2n^2 - 2n + 2n - 2n^2 = 0.$$

$(X-1)^3$ ne divise donc pas $P(X)$.