

Corrigé de la Série 19

1. Trouver le module et l'argument de :

(a) $z = 5 + 12i$;

(b) $z = \sqrt{3} + i$;

(c) $z = \frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$.

(a) $z = 5 + 12i \Rightarrow |z| = \sqrt{25 + 144} = 13$, et $\cos \varphi = \frac{5}{13}$; $\sin \varphi = \frac{12}{13}$;

Donc, $\varphi = \text{Arcsin}(\frac{12}{13}) = \text{Arccos}(\frac{5}{13})$.

(b) $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z| = 2$; $\varphi = \frac{\pi}{6}$;

(c) $z = \frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$.

d'où $|z| = 1$ et $\varphi = 2\alpha$.

2. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

(a) $z = -2$;

(d) $z = \sqrt{3} + i$;

(b) $z = 7i - \frac{3}{i}$;

(e) $z = \frac{1}{1 - i}$;

(c) $z = -1 + i$;

(f) $z = -3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

(a) $z = -2 = 2e^{i\pi}$;

(b) $z = 7i - \frac{3}{i} = 7i + 3i = 10i = 10e^{i\frac{\pi}{2}}$;

(c) $z = -1 + i = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4}) \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

(d) $z = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$;

(e) $z = \frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

(f) $z = -3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) \right) = 3e^{i\frac{5\pi}{4}} = 3e^{-\frac{3\pi}{4}}$.

3. Mettre sous la forme $a + bi$:

(a) $z = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

(d) $z = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$;

(b) $z = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$;

(e) $z = \frac{(2e^{-i\frac{\pi}{3}})^4}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

(c) $z = \pi e^{i(\pi-t)}$;

$$(a) \quad z = 5e^{-i\frac{\pi}{2}} = 5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -5i$$

$$(b) \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{8}} = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \right) = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\text{car : } \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)} \quad \text{et} \quad \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)}$$

$$(c) \quad z = \pi e^{i(\pi-t)} = \pi [\cos(\pi-t) + i \sin(\pi-t)] = -\pi \cos t + i\pi \sin t$$

$$(d) \quad z = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 4e^{-i\frac{\pi}{2}} = -4i$$

$$(e) \quad z = \frac{(2e^{-i\frac{\pi}{3}})^4}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{16e^{-i\frac{4\pi}{3}}}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = 4e^{-i\frac{19\pi}{12}} = 4e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$\text{Calcul de } \cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) \text{ et } \sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) :$$

$$\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \cos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right] = +\sqrt{\frac{1 + \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right)}{2}},$$

$$\text{positivité du cos : } \cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

$$\text{et de même, } \sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$\Rightarrow z = 4 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) \right] = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} + i\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

$$\text{Or : } 8 \pm 4\sqrt{3} = 8 \pm 2\sqrt{12} = (\sqrt{6} \pm \sqrt{2})^2$$

$$\text{ce qui finalement nous donne : } z = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

4. Calculer les racines carrées de :

$$(a) \quad z = 9i ;$$

$$(b) \quad z = 5 - 12i ;$$

$$(c) \quad z = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{i}.$$

$$(a) \quad z = 9i = 9e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z} = 3e^{i(\frac{\pi}{4} + k\pi)} \quad k = 0; 1, \quad \text{d'où :}$$

$$z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

(b) $z = 5 - 12i = 13e^{i\varphi}$ avec $\cos \varphi = \frac{5}{13}$, $\sin \varphi = -\frac{12}{13}$;
 Donc, $\varphi = -\text{Arcsin}(\frac{12}{13}) = -\text{Arccos}(\frac{5}{13})$.

$\sqrt{z} = \sqrt{13}e^{i(\frac{\varphi}{2} + k\pi)}$ $k = 0; 1$;
 Donc,

$$\begin{aligned} z_+ &= \sqrt{13} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\sqrt{13} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{13} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos(\varphi)}{2}} - i\sqrt{\frac{1 - \cos(\varphi)}{2}} \right) \\ &= 3 - i2, \quad z_- = -3 + i2. \end{aligned}$$

(c) $z = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{i} = \frac{1+i}{2} - i = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

$\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{-i\frac{\pi}{8} + ik\pi}$ $k = 0; 1$
 Donc,

$$\begin{aligned} z_+ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} - i\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} \right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\sqrt{2} + 1} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1} \right), \quad z_- = \frac{-1}{2} \left(\sqrt{\sqrt{2} + 1} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1} \right). \end{aligned}$$

5. Calculer les racine 4^{ième} de

(a) $z = \sqrt{8} + i\sqrt{8}$.

(b) $z = i$.

(a) En représentation polaire, on obtient

$$|z| = \sqrt{8 + 8} = 4, \quad \varphi_z = \arcsin \sqrt{8}/4 = \frac{\pi}{4}.$$

On est donc ramené à trouver $w = re^{i\varphi}$, tel que

$$(re^{i\varphi})^4 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^4 = 4, \\ 4\varphi = \frac{\pi}{4} \bmod{2\pi} \end{cases}.$$

On a donc les quatre possibilités

$$w \in \{ \sqrt{2}e^{i\pi/16}, \sqrt{2}e^{i9\pi/16}, \sqrt{2}e^{i17\pi/16}, \sqrt{2}e^{i25\pi/16} \}.$$

(b) En représentation polaire, on obtient

$$|z| = \sqrt{1} = 1, \quad \varphi_z = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

On est donc ramené à trouver $w = re^{i\varphi}$, tel que

$$(re^{i\varphi})^4 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^4 = 1, \\ 4\varphi = \frac{\pi}{2} \bmod{2\pi} \end{cases}.$$

On a donc les quatre possibilités

$$w \in \{ e^{i\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i9\pi/8}, e^{i13\pi/8} \}.$$

6. Former un triangle équilatéral $P_0P_1P_2$ avec

$$P_0(1, 1), \quad P_1(3, 3)$$

en utilisant le calcul dans $\mathbb{C}$.

Comme les angles d'un triangles équilatéral sont tous de $\frac{\pi}{3}$, on peut trouver P_2 simplement en faisant une rotation de P_1 autour de P_0 , par un angle de $\frac{\pi}{3}$.

On trouve alors

$$\begin{aligned} z_{P_2} &= z_{P_0} + e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{P_1} - z_{P_0}) \\ &= 1 + i + e^{i\frac{\pi}{3}}(3 + 3i - 1 - i) \\ &= 1 + i + (\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))(2 + 2i) \\ &= 1 + i + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + 2i) \\ &= 1 + i + 1 + i - \sqrt{3} + \sqrt{3}i = 2 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 2). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}).$$

7. En utilisant le calcul complexe, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \cos n\theta = \sum_{0 \leq 2l \leq n} (-1)^l \binom{n}{2l} \cos^{n-2l} \theta \sin^{2l} \theta, \\ \sin n\theta = \sum_{0 \leq 2l+1 \leq n} (-1)^l \binom{n}{2l+1} \cos^{n-2l-1} \theta \sin^{2l+1} \theta. \end{cases}$$

C'est la **formule de Moivre**.

Par la représentation polaire on sait que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. En repassant en écriture standard on a donc que

$$\begin{aligned} \cos n\theta + i \sin n\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta)^{n-k} (i \sin \theta)^k \\ &= \sum_{0 \leq 2l \leq n} (-1)^l \binom{n}{2l} \cos^{n-2l} \theta \sin^{2l} \theta + i \sum_{0 \leq 2l+1 \leq n} (-1)^l \binom{n}{2l+1} \cos^{n-2l-1} \theta \sin^{2l+1} \theta. \end{aligned}$$

La formule de Moivre s'ensuit en identifiant séparément les partie réelles et imaginaires de cette égalité.