Corrigé de la Série 18

Nombres complexes: opérations algébriques

1. Mettre sous la forme $a + ib$:

(a) $(4-i)+(2+3i)(1-i)$;

(b) $\dfrac{1}{3-2i}$;

(c) i^n n entier ;

(d) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

On a

(a) $(4-i)+(2+3i)(1-i) = (4-i)+[(2+3)+i(-2+3)] = (4-i)+(5+i) = 9$;

(b) $\dfrac{1}{3-2i} = \dfrac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{3+2i}{9+4} = \dfrac{3}{13} + i\dfrac{2}{13}$;

(c) $i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i \quad k \in \mathbb{N}$;

(d) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \dfrac{(1+i)^7}{(1-i)^7}(1+i)^2 = \left[\dfrac{(1+i)}{(1-i)}\right]^7 (1+i)^2 = \left[\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^7 (1+i)^2$

$= \frac{(2i)^7}{2^7} 2i = i^7(2i) = 2.$

2. Résoudre :

(a) $z^2 + 2(1+i)z - \dfrac{5}{1+2i} = 0$

en complétant le membre de gauche pour former un carré parfait ;

(b) $z^3 + 9z - 10 = 0.$

(a) $z^2 + 2(1+i)z - \dfrac{5}{1+2i} = 0$, on compléte les 2 premiers termes du membre de gauche

pour former un carré parfait ce qui donne :

$$z^2 + 2(1+i)z + (1+i)^2 - \frac{5(1-2i)}{5} - (1+i)^2 = 0$$

qui s'écrit : $[z+(1+i)]^2 - (1-2i) - 2i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [z+(1+i)]^2 = 1$ donc :

$z + (1+i) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad z = -i \quad \text{ou} \quad z = -2-i$;

(b) $z^3 + 9z - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z-1)(z^2 + z + 10) = 0 \quad \Rightarrow$

$$(z-1)\left(z + \frac{1+i\sqrt{39}}{2}\right)\left(z + \frac{1-i\sqrt{39}}{2}\right) = 0$$

d'où les solutions : $z_1 = 1,\ z_{2,3} = -\dfrac{1 \pm i\sqrt{39}}{2}$.

3. Résoudre :

(a) $z - i\overline{z} = 0$ et $|z| = 2\sqrt{2}$; (b) $2iz + \overline{z} = 0$ et $|z| = 2$;

(a) Ecrivant $z = x + iy$, on écrit l'équation comme

$$(x + iy) - i(x - iy) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

La condition $|z| = 2\sqrt{(2)}$ s'écrit alors $x^2+y^2 = 8$, d'où $x = \pm 2$ et $z = \pm(2+i2)$.

(b) Ecrivant $z = x + iy$, on écrit l'équation comme

$$2i(x + iy) + (x - iy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2ix - 2y + x - iy = 0.$$

Il faut donc $x = 2y$ et $y = 2x$, ce qui implique $x = 0 = y$. Si de plus $|z| = 2$, on ne peut avoir de solutions.

4. Trouver parmi les solutions de l'équation : $(z + \overline{z})z^3 + 4(\overline{z}^2 - z^2) = 0$
celle(s) satisfaisant $2\mathrm{Re}z > |z|$.

L'équation peut se retravailler comme

$$\begin{aligned} & (z + \bar{z})z^3 + 4(\bar{z}^2 - z^2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (z + \bar{z})z^3 + 4(z + \bar{z})(\bar{z} - z) = 0. \end{aligned}$$

Comme $2\mathfrak{Re}(z) > |z|$, on peut simplifier par $z + \bar{z}$ et on peut résoudre

$$z^3 + 4(\bar{z} - z) = 0.$$

Ecrivant à nouveau $z = x + iy$, on a donc

$$x^3 - 3xy^2 + 3ix^2y - iy^3 = 8iy$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 0 \\ y^3 - 3x^2y + 8y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 0 \\ y(y^2 - 3x^2 + 8) = 0 \end{cases} .$$

La solution $x = 0 = y$ doit être écartée (car $2x = 2\mathfrak{Re}(z) > |z| \geq 0$) et on a

$$x = \pm\sqrt{3}y, \quad 8y^2 - 8 = 0.$$

On a donc $y = 1, x = \pm\sqrt{3}$ et $y = -1, x = \pm\sqrt{3}$ comme solutions possibles. Retenant que celles avec parties réelles positives, on a $z_\pm = \sqrt{3} \pm i$. On a bien $|z_\pm| = 2 < 2\sqrt{3}$.

5. On considère l'équation : $|z|^2 = \left(-\dfrac{3}{4} + bi\right) \cdot \left(\dfrac{z}{1-z}\right)$, $\quad b \in \mathbb{R}^+$
Déterminer b pour que cette équation ne possède qu'une solution ($\neq 0$) ;
Quelle est cette solution ?

On a : $|z|^2 = z\overline{z} = \left(-\dfrac{3}{4} + bi\right) \cdot \left(\dfrac{z}{1-z}\right)$, $\quad b \in \mathbb{R}^+$ Pour $z \neq 0$, on a alors :

$(1-z)\overline{z} = \left(-\dfrac{3}{4} + bi\right)$. On pose alors $z = x + iy$ et on obtient :

$$x - (x^2 + y^2) - iy = -\frac{3}{4} + ib \iff$$

$$\begin{cases} x - (x^2+y^2) = -\frac{3}{4} \\ y = -b \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x + b^2 - \frac{3}{4} = 0 \\ y = -b \end{cases}$$

La première équation nous donne, avec la condition imposée : discriminant nul,

$\Delta = 0 = 1 + 3 - 4b^2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$ avec la condition de positivité.

D'où : $\quad x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{1}{2} - i\,.$

6. Factoriser dans $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ les nombres premiers

(a) $p = 13$, (b) $p = 17$.

(a) D'après le cours, il s'agit donc de trouver deux nombres entiers a et b, tels que $a^2 + b^2 = 13$. En essayant des valeurs entières pour a on trouve $a = 3$ et $b = 2$ (ou inversement). Les factorisations (non-triviales) possibles sont alors

$$\begin{aligned} 13 &= (3+2i)(3-2i) = (-2+3i)(-2-3i) = (-3-2i)(-3+2i) = (2-3i)(2+3i) \\ &= (i)^k(3+2i)(-i)^k(3-2i), \quad k = 0,1,2,3. \end{aligned}$$

(b) D'après le cours, il s'agit donc de trouver deux nombres entiers a et b, tels que $a^2 + b^2 = 17$. En essayant des valeurs entières pour a on trouve $a = 4$ et $b = 1$ (ou inversement). Les factorisations (non-triviales) possibles sont alors

$$\begin{aligned} 17 &= (4+i)(4-i) = (-1+4i)(-1-4i) = (-4-i)(-4+i) = (1-4i)(1+4i) \\ &= (i)^k(4+i)(-i)^k(4-i), \quad k = 0,1,2,3. \end{aligned}$$

7. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a vu au cours que

1. $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.
2. $|z| = |\overline{z}|$.
3. $|z|^2 = z\,\overline{z}$.
4. $\overline{z\,z'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.

Montrer à partir de ces propriétés que

5. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.
6. $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.
7. $z \neq 0 \Rightarrow |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$.
8. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
9. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.
10. $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

En utilisant les points 1. à 4., on trouve

5.
$$\begin{aligned} |z \cdot z'|^2 \;&\underset{3.}{=}\; \overline{z \cdot z'} \cdot z \cdot z' \;\underset{4.}{=}\; \overline{z} \cdot \overline{z'} \cdot z \cdot z' \\ &= \overline{z} \cdot z \cdot \overline{z'} \cdot z' \;\underset{3.}{=}\; |z|^2\,|z'|^2. \end{aligned}$$

On conclut par prise de la racine.

6. Multiplions $\frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ par z :
$$\frac{1}{|z|^2}\overline{z} \cdot z \;\underset{3.}{=}\; \frac{1}{|z|^2} \cdot |z|^2 \;=\; 1.$$

7.
$$\begin{aligned} |z^{-1}|^2 \;&\underset{3.\text{ et }6.}{=}\; \overline{\left(\frac{1}{|z|^2}\overline{z}\right)} \cdot \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \;\underset{4.}{=}\; \overline{\frac{1}{|z|^2}} \cdot \overline{\overline{z}} \cdot \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \\ &= \frac{1}{|z|^2} \cdot z \cdot \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \;=\; \frac{1}{|z|^4} \cdot z \cdot \overline{z} \;\underset{3.}{=}\; \frac{1}{|z|^4} \cdot |z|^2 \;=\; |z|^2 \end{aligned}$$

On conclut par prise de la racine.

8. On pose $z = a + ib$ et $z' = c + id$ et on calcule
$$\begin{aligned} \overline{z + z'} \;&=\; \overline{(a+ib) + (c+id)} \;=\; \overline{a + c + i(b+d)} \\ &= a + c - i(b+d) \;=\; (a - ib) + (b - id) \;=\; \overline{z} + \overline{z'}. \end{aligned}$$

9. On pose $z = a + ib$ et on calcule
$$\begin{aligned} z + \overline{z} \;&=\; (a+ib) + \overline{(a+ib)} \;=\; a + ib + a - ib \\ &= 2a \;=\; 2\mathrm{Re}(z). \end{aligned}$$

10. On pose $z = a + ib$ et on calcule
$$\begin{aligned} z - \overline{z} \;&=\; (a+ib) - \overline{(a+ib)} \;=\; a + ib - a + ib \\ &= 2ib \;=\; 2i\mathrm{Im}(z). \end{aligned}$$