Corrigé de la Série 17

3.3. Règles de calcul

1. Exprimer la fonction

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad \text{comme} \quad f(x) = a + \frac{b}{x-1}.$$

Puis, utiliser la règle de calcul d'addition des polynômes de Taylor pour trouver celui de $f(x)$ autour de $x_0 = 0$ à l'ordre n.

On cherche des nombres a et b pour que

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} = a\frac{b}{x-1}$$

Mais:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2x^2 - 4x + 2 - 1 + x}{x^2 - 2x + 1}$$
$$= 2 + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 1} = 2 + \frac{x-1}{(x-1)^2} = 2 - \frac{1}{1-x}.$$

On a donc

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = 2, \quad h(x) = -\frac{1}{1-x}.$$

Le polynôme de Taylor pour $-\frac{1}{1-x}$ est moins la série géométrique et celui de $g(x) = 2$, un polynôme, est $g(x)$ lui-même. Additionnant ces deux polynômes de Taylor on a donc

$$P_{f,0,n}(x) = \underbrace{2}_{P_{2,0,n}(x)} + \underbrace{-1 - x^2 - x^3 - \ldots - x^n}_{P_{\frac{-1}{1-x},0,n}(x)}$$
$$= 1 - x - x^2 - \ldots - x^n.$$

2. Calculer le polynôme de Taylor $P_{f,0,n}(x)$ pour

(a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (b) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

(a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ peut se voir comme la composition de $y \mapsto \frac{1}{1-y} = f(y)$ avec $y = x^2 = g(x)$. On peut donc composer deux polynômes de Taylor déjà connus:

$$P_{\frac{1}{1-y},0,n}(y) = 1 + y + y^2 + \ldots + y^n = \sum_{k=0}^{n} y^k,$$

$$P_{x^2,0,n}(x) = x^2,$$

$$\Rightarrow \quad P_{\frac{1}{1-y},0,n}(P_{x^2,0,n}(x)) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}.$$

Ici la composition des deux polynômes de Taylor nous donne un polynôme de degré $2n$. On doit donc omettre tous les termes de degré supérieur à n:

$$P_{\frac{1}{1-x^2},0,n}(x) = \left[P_{\frac{1}{1-y},0,n}(P_{x^2,0,n}(x))\right]_n = \sum_{0\leq 2k\leq n} x^{2k}.$$

(b) La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ peut se voir comme la composition de $y \mapsto \frac{1}{1-y} = f(y)$ avec $y = -x^4 = g(x)$. On peut donc composer deux polynômes de Taylor déjà connus:

$$P_{\frac{1}{1-y},0,n}(y) = 1 + y + y^2 + \ldots + y^n = \sum_{k=0}^{n} y^k,$$

$$P_{-x^4,0,n}(x) = -x^4,$$

$$\Rightarrow \quad P_{\frac{1}{1-y},0,n}(P_{-x^4,0,n}(x)) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{4k}.$$

Ici la composition des deux polynômes de Taylor nous donne un polynôme de degré $4n$. On doit donc omettre tous les termes de degré supérieur à n:

$$P_{\frac{1}{1+x^4},0,n}(x) = \left[P_{\frac{1}{1-y},0,n}(P_{-x^4,0,n}(x))\right]_n = \sum_{0\leq 4k\leq n} (-1)^k x^{4k}.$$

3. Calculer le polynôme de Taylor $P_{f,0,n}(x)$ pour $f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$ en écrivant $f(x)$ comme la différence de deux fonctions.

On peut commencer par observer que

$$\ln(\frac{1+x}{1-x}) = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

Ceci est donc une somme de deux fonctions, dont les polynômes de Taylor sont facilement calculables.
En effet, $\ln(1+x)$ est la composition de $f(y) = \ln(y)$ et $g(x) = y = 1+x$, alors que $\ln(1+x)$ est la composition de $f(y) = \ln(y)$ et $h(x) = y = 1-x$.
On a donc:

$$P_{\ln,1,n}(y) = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(y-1)^n,$$

$$P_{g,0,n}(x) = 1+x,$$

$$P_{h,0,n}(x) = 1-x,$$

$$P_{\ln(1+x),0,n}(x) = [P_{\ln,1,n}(1+x)]_n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n,$$

$$P_{\ln(1-x),0,n}(x) = [P_{\ln,1,n}(1-x)]_n = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \ldots - \frac{1}{n}x^n.$$

La différence de ces deux polynômes de Taylor nous donne donc le polynôme de Taylor pour $f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$.

Cette différence est obtenue en remarquant, que les puissances paires apparaissent avec un signe opposé et vont donc s'annuler, alors que les puissances impaires s'additionnent:

$$P_{\ln(\frac{1+x}{1-x}),0,n}(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \ldots = \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \frac{2}{2k+1}x^{2k+1}.$$

Le fait que seul des puissances impaires apparaîssent dans le polynôme de Taylor pour $x_0 = 0$ traduit l'imparité de la fonction $f(x)$:

$$f(-x) = \ln(\frac{1-x}{1+x}) = -\ln(\frac{1+x}{1-x}) = -f(x).$$

4. Utiliser la définition du polynôme de Taylor et comparer à

$$P_{\arctan,0,9}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

pour trouver les valeurs de

(a) $\arctan^{(7)}(0)$, (b) $\arctan^{(9)}(0)$.

Par définition, pour une fonction 9 fois dérivable:

$$P_{f,0,9}(x) = f(0) + f^{(1)}(0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{7!}f^{(7)}(0)x^7 + \ldots + \frac{1}{9!}f^{(9)}(0)x^9.$$

En comparant avec

$$P_{\arctan,0,9}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

on trouve

$$-\frac{1}{7} = \frac{1}{7!}\arctan^{(7)}(0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{9!}\arctan^{(9)}(0) = \frac{1}{9}.$$

Ainsi,

(a) $\arctan^{(7)}(0) = -6!$, (b) $\arctan^{(9)}(0) = 8!$.

5. On considère le polynôme de Taylor de $f(x) = \ln(\cos(x))$ à l'orde 5 autour de $x_0 = 0$:

$$P_{\ln(\cos(x)),0,5}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4.$$

Si on dérive ce $P_{f,0,5}(x)$ donné ci-dessus, on obtient le polyôme de Taylor pour quelle fonction et à quelle ordre?

Par la règle de calcul des dérivées, on a

$$\frac{d}{dx}P_{\ln(\cos(x)),0,5}(x) = P_{\frac{d}{dx}\ln(\cos(x)),0,4}(x) = P_{-\tan(x),0,4}(x).$$

On obtient ainsi

$$P_{-\tan(x),0,4}(x) = -x - \frac{1}{3}x^3 \quad (= -P_{\tan(x),0,3}(x)).$$

6. On rappelle ici que

$$P_{\sqrt{x},1,n}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!}(x-1)^k.$$

(a) Utiliser la règle de dérivation pour trouver le $P_{\frac{1}{\sqrt{x}},1,n}(x)$.

(b) Composer pour trouver le $P_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},0,n}(x)$.

(c) Utiliser la règle d'intégration pour trouver le $P_{\arcsin,0,n}(x)$.

(a) La règle de dérivation nous dit que

$$\frac{d}{dx}P_{f,x_0,n+1}(x) = P_{f^{(1)},x_0,n}(x).$$

La dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ est $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$. Pour obtenir le polynôme de Taylor pour $\frac{1}{\sqrt{x}}$ à l'ordre n autour de $x_0 = 1$, on calcule alors

$$\begin{aligned}
P_{\frac{1}{\sqrt{x}},1,n}(x) &= 2\frac{d}{dx}P_{\sqrt{x},1,n+1}(x) \\
&= 2\frac{d}{dx}\left(1 + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!}(x-1)^k\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!}k(x-1)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-2}(k-1)!(k-1)!}(x-1)^{k-1}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1}{2^{2k-2}}\binom{2k-2}{k-1}(x-1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}(x-1)^k.$$

(b) Pour trouver le $P_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},0,n}(x)$ on remarque que $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est la composition de $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ avec $g(x) = y = 1 - x^2$.

De plus, $y_0 = g(x_0) = 1$ si $x_0 = 0$. Ceci est important pour la composition des polynômes de Taylor. Il faut composer le polynôme de f autour y_0 avec celui de g autour de x_0, avec la condition que $y_0 = f(x_0)$.

On est donc en droit d'appliquer la règle de composition. Pour obtenir $P_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},0,n}(x)$ on va composer $P_{\frac{1}{\sqrt{y}},y_0=1,n}(y)$ avec $P_{1-x^2,x_0=0,n}(x)$ et retenir que les termes de puissance $\leq n$:

$$P_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},0,n}(x) = \big[P_{\frac{1}{\sqrt{y}},1,n}(P_{\sqrt{1-x^2},0,n}(x))\big]_n$$

$$\big[P_{\frac{1}{\sqrt{y}},1,n}(1-x^2))\big]_n = \Big[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}(-x^2)^k\Big]_n$$

$$= \Big[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}x^{2k}\Big]_n = \sum_{0\leq 2k\leq n}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}x^{2k}.$$

(c) Comme $\arcsin^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on va utiliser la règle d'intégration pour trouver le $P_{\text{arcsin},0,n}(x)$:

$$P_{\text{arcsin},0,n}(x) = \underbrace{\arcsin(0)}_{=0} + \int_0^x P_{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},0,n-1}(t)dt$$

$$= \int_0^x \sum_{0\leq 2k\leq n-1}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}t^{2k}dt = \sum_{0\leq 2k\leq n-1}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\int_0^x t^{2k}dt$$

$$= \sum_{0\leq 2k\leq n-1}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$$

$$= \sum_{1\leq 2k+1\leq n}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}.$$