Corrigé de la Série 16

3.2. Termes de correction

1. (a) Soit $x > 0$. A l'aide du terme de correction, montrer que

$$|\sin(x) - x + \frac{1}{3!}x^3| \leq \frac{1}{5!}x^5.$$

(b) Déduire du point précédent que

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{120} \leq \sin(1) \leq \frac{5}{6} + \frac{1}{120}.$$

(a) On rappelle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

Le développement limité du sin à l'ordre 4 autour de $x_0 = 0$ s'écrit alors comme

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!}\sin^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{5!}\sin^{(5)}(\xi)x^5 \\ &= \underbrace{x - \frac{1}{3!}x^3}_{P_{\sin,0,4}(x)} + \underbrace{\frac{1}{5!}\cos(\xi)x^5}_{r_{\sin,0,4}(x)},\end{aligned}$$

pour une valeur (inconnue) $\xi \in]0, x[$ (remarquer que comme sin n'a que des puissances impaires dans son polnôme de Taylor, $P_{\sin,0,3}(x) = P_{\sin,0,4}(x)$). On a donc

$$|\sin(x) - x + \frac{1}{3!}x^3| = |\frac{1}{5!}\cos(\xi)x^5| \leq \frac{1}{5!}x^5.$$

(b) On remplace x par 1 dans le point précédent, ce qui donne

$$|\sin(1) - 1 + \frac{1}{3!}| \leq \frac{1}{5!}.$$

On en conclut que

$$\underbrace{1 - \frac{1}{3!}}_{\frac{5}{6}} - \underbrace{\frac{1}{5!}}_{\frac{1}{120}} \leq \sin(1) \leq \underbrace{1 - \frac{1}{3!}}_{\frac{5}{6}} + \underbrace{\frac{1}{5!}}_{\frac{1}{120}}.$$

2. (a) Soit $x > 1$. A l'aide du terme de correction, montrer que

$$|\ln(x) - (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2| < \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

(b) Déduire du point précédent la valeur de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

(a) On a déjà calculé les dérivées successives du logarithme:

$$\forall n \geq 1, \quad \ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}.$$

Le développement limité du logarithme (polynôme de Taylor plus terme de correction) à l'ordre 2 autour de $x_0 = 1$ s'écrit alors, selon le cours, comme

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(1) + \ln^{(1)}(1)(x-1) + \frac{\ln^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{\ln^{(3)}(\xi)}{3!}(x-1)^3 \\ &= \underbrace{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2}_{P_{\ln,1,2}(x)} + \underbrace{\frac{1}{3\xi^3}(x-1)^3}_{r_{\ln,1,2}(x)},\end{aligned}$$

avec $\xi \in]1, x[$. On a donc pour $x > 1$:

$$|\ln(x) - (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2| = |\frac{1}{3\xi^3}|(x-1)^3 < \frac{1}{3}(x-1)^3,$$

où on a utilisé que si $\xi > 1$, $\frac{1}{\xi^3} < 1$.

(b) Pour $x = 1,003$, et donc $x - 1 = \frac{3}{1'000}$, on a alors

$$\begin{aligned}&|\ln(1,003) - \frac{3}{1'000} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1'000}\right)^2| < \frac{1}{3}\left(\frac{3}{1'000}\right)^3 \\ \Leftrightarrow \quad &|\ln(1,003) - \frac{5'991}{2'000'000}| < \frac{9}{1'000'000'000} < 10^{-8}.\end{aligned}$$

Donc, à 10^{-8} près (et même un peu mieux), $\ln(1,003) \approx \frac{5'991}{2'000'000}$.

3. (a) Calculer le polynôme de Taylor $P_{f,0,n}(x)$ ainsi que le terme de reste $r_{f,0,n}(x)$ pour $f(x) = e^{-x}$.

(b) Montrer que pour $f(x) = e^{-x}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} r_{f,0,n}(x) = 0.$$

(a) Les dérivées de $f(x) = \exp(-x)$ sont données par

$$\forall n \in (N), \quad f^{(n)}(x) = \exp(-x)(-1)^n.$$

Cela donne donc pour le polynôme de Taylor

$$\begin{aligned}P_{\exp(-x),0,n}(x) &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

Le terme de correction sera alors

$$r_{\exp(-x),0,n}(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-\xi),$$

$$\text{pour un } \xi \in]0, x[\text{(ou un}\xi \in]x, 0[).$$

(b) Fixons une valeur de $x \in \mathbb{R}$ et laissons tendre n vers l'infini. On observe d'abord que

$$\begin{aligned}
|r_{\exp(-x),0,n}(x)| &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-\xi) \quad \text{pour un } \xi \in]0,x[\text{ ou } \xi \in]x,0[\\
&\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|\xi|) \quad \text{,car exp est croissante et } -\xi \leq |\xi| \\
&\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|x|) \quad \text{,car exp est croissante et } |\xi| \leq |x|.
\end{aligned}$$

Or, on a vu au cours que pour une valeur de $x \in \mathbb{R}$ fixée, $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Comme $\exp(|x|)$ est une valeur fixe aussi, si $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} |r_{\exp(-x),0,n}(x)| = 0$$

et que donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} r_{\exp(-x),0,n}(x) = 0$$

ou encore que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} P_{\exp(-x),0,n}(x) = \exp(-x).$$

4. Exprimer le terme de correction $r_{f,0,n}(x)$ et montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\lim_{n\to\infty} r_{f,0,n}(x) = 0$$

pour

(a) $f(x) = \sin(x)$, (b) $f(x) = \sinh(x)$.

(a) Comme vu dans la série précédente on a que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

D'après le théorème du cours sur le terme de correction d'un polynôme de Taylor, on sait que

$$r_{\sin,0,n}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin^{(n+1)}(\xi) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}),$$

où ξ est un nombre (inconnu) dans l'intervalle $]0,x[$ ou $]x,0[$, suivant si $x \geq 0$ ou $x \leq 0$.

Si on fixe maintenant la valeur de x et que l'on fait augmenter la valeur de n (autrement dit on ajoute de plus en plus de termes au polynôme de Taylor $P_{\sin,0,n}(x)$) on trouve que

$$\begin{aligned}
|r_{\sin,0,n}(x)| &= |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2})| \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}|\sin(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2})| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

puisque , même sans connaître plus précisément la valeur de ξ, on sait que la valeur du sinus est toujours majorée par 1.
Or, comme vu au cours, si on fixe la valeur de x, donc aussi celle de $|x|$, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} |r_{\sin,0,n}(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} P_{\sin,0,n}(x) = \sin(x).$$

(b) D'après le théorème du cours sur le terme de correction d'un polynôme de Taylor, on sait que

$$r_{\sinh,0,n}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sinh^{(n+1)}(\xi) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{2} \left(e^{\xi} + (-1)^{n+2} e^{-\xi}\right),$$

où ξ est un nombre (inconnu) dans l'intervalle $]0, x[$ ou $]x, 0[$, suivant si $x \geq 0$ ou $x \leq 0$.

Si on fixe maintenant la valeur de x et que l'on fait augmenter la valeur de n (autrement dit on ajoute de plus en plus de termes au polynôme de Taylor $P_{\sinh,0,n}(x)$) on trouve que

$$\begin{aligned}
|r_{\sinh,0,n}(x)| &= \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{2} \left(e^{\xi} + (-1)^{n+2} e^{-\xi}\right)\right| \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left|\frac{1}{2} \left(e^{\xi} + (-1)^{n+2} e^{-\xi}\right)\right| \\
&\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{2} \left(|e^{\xi}| + |e^{-\xi}|\right) \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cosh(\xi) \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cosh(|x|),
\end{aligned}$$

puisque , même sans connaître plus précisément la valeur de ξ, on sait que $\xi \in]0, x[$ ou $\xi \in]x, 0[$, et donc on a $|\xi| \leq |x|$.
Or, comme vu au cours, si on fixe la valeur de x, donc aussi celle de $|x|$, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} |r_{\sinh,0,n}(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{\cosh(|x|)}_{\text{val. fixée}} = 0$$

et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} P_{\sinh,0,n}(x) = \sinh(x).$$

5. (a) Déterminer le développement limité, c'est -à-dire le polynôme de Taylor et le terme de correction, au voisinage de $x_0 = 0$ et à l'ordre 4 de la fonction $f(x) = \cosh(x)$:

(b) Utiliser le point précédent pour étudier si la fonction :

$$f(x) = \frac{24\cosh(x) - 24 - 12x^2 - 2x^4}{x^4}, \quad \mathrm{Def}_f = \mathbb{R}^*$$

est prolongeable par continuité au voisinage de $x_0 = 0$.

(a) Les quatre première dérivées de $\cosh(x)$ sont

$$\cosh^{(1)}(x) = \sinh(x), \quad \cosh^{(2)}(x) = \cosh(x),$$
$$\cosh^{(3)}(x) = \sinh(x), \quad \cosh^{(4)}(x) = \cosh(x).$$

Après évaluation en $x_0 = 0$ et division par $k!$ on trouve les coefficients

$$a_0 = \cosh(0) = 1, \quad a_1 = \cosh^{(1)}(0) = 0, \quad a_2 = \frac{\cosh^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{2},$$
$$a_3 = \frac{\cosh^{(3)}(0)}{3!} = 0, \quad a_4 = \frac{\cosh^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Ainsi,

$$P_{\cosh,0,4}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

Le terme de correction est donné par

$$r_{\cosh,0,4}(x) = \frac{x^5}{5!}\cosh^{(5)}(\xi) = \frac{x^5}{120}\sinh(\xi),$$

avec $\xi \in]0, x[$. Par conséquent, le développement limité de $\cosh(x)$ autour de $x_0 = 0$ à l'ordre 4 est

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{x^5}{120}\sinh(\xi).$$

(b) Evaluons la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{24\cosh(x) - 24 - 12x^2 - 2x^4}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{24\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{x^5}{120}\sinh(\xi)\right) - 24 - 12x^2 - 2x^4}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{-x^4 + \frac{x^5}{5}\sinh(\xi)}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0} \left(-1 + \frac{x}{5}\sinh(\xi)\right).$$

Comme $\sinh(x)$ est continue et que $\xi \in]0, x[$, on a que $\lim_{x\to 0} \xi = \lim_{x\to 0} x = 0$ et

$$\lim_{x\to 0} \sinh(\xi) = \lim_{\xi\to 0} \sinh(\xi) = 0.$$

Donc, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{5}\sinh(\xi) = 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$.

La fonction $f(x)$ est donc continûment prolongeable en $x = 0$ si on pose

$$f(0) = -1.$$

6. (a) Déterminer le polynôme de Taylor et le terme de correction de la fonction $\arcsin(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $x_0 = \frac{1}{2}$.
(Indication: $\arcsin^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.)

(b) Utiliser le point précédent pour calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}\arcsin(x) - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{6} - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2}{(x-\frac{1}{2})^2}.$$

(a) Les dérivées successives de $\arcsin(x)$ sont

$$\arcsin^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}, \quad \arcsin^{(2)}(x) = x(1-x^2)^{-3/2},$$

$$\begin{aligned}\arcsin^{(3)}(x) &= \left(\frac{d}{dx}x\right)(1-x^2)^{-3/2} + x\left(\frac{d}{dx}(1-x^2)^{-3/2}\right)\\ &= (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2} = (1+2x^2)(1-x^2)^{-5/2}.\end{aligned}$$

En évaluant en $x_0 = \frac{1}{2}$ et en divisant par $k!$ nous donne les coefficients

$$a_0 = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}, \quad a_1 = \arcsin^{(1)}(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$a_2 = \frac{\arcsin^{(2)}(\frac{1}{2})}{2!} = \frac{1}{4}\frac{2^3}{\sqrt{3}^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Ainsi, on a le polynôme de Taylor

$$P_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})^2.$$

Le terme de correction se calcule selon la théorie comme

$$r_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x) = (x-\frac{1}{2})^3\frac{\arcsin^{(3)}(\xi)}{3!} = (x-\frac{1}{2})^3\frac{1+2\xi^2}{6(1-\xi^2)^{5/2}}.$$

On obtient ainsi

$$\arcsin(x) = \underbrace{\frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})^2}_{P_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x)} + \underbrace{(x-\frac{1}{2})^3\frac{1+2\xi^2}{6(1-\xi^2)^{5/2}}}_{r_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x)}.$$

(b) Par le point précédent,

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{3}\arcsin(x) - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{6} - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2 \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + 2(x-\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})^2 + \sqrt{3}r_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x) - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{6} - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2 \\
&= 2x - 1 + \frac{2}{3}(x^2 - x + \frac{1}{4}) + \sqrt{3}r_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x) + \frac{5}{6} - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2 \\
&= -\frac{5}{6} + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2 + \sqrt{3}r_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x) + \frac{5}{6} - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2 \\
&= \sqrt{3}r_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x).
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}\arcsin(x) - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{6} - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2}{(x-\frac{1}{2})^2}. \\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}r_{\arcsin,\frac{1}{2},2}(x)}{(x-\frac{1}{2})^2} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}(x-\frac{1}{2})^3\frac{1}{3!}\arcsin^{(3)}(\xi)}{(x-\frac{1}{2})^2} \\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\arcsin^{(3)}(\xi) = 0,
\end{aligned}
$$

puisque $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) = 0$ et que $\arcsin^{(3)}(\xi)$, étant une fonction continue, reste bornée sur tout l'intervalle $[\frac{1}{2}, x]$.