Corrigé de la Série 15

3.1. Polynômes de Taylor

1. (a) Trouver le polynôme de Taylor $P_{f,0,4}(x)$ d'une fonction f qui satisfait

$$f(0) = 0,\ f^{(1)}(0) = 1,\ f^{(2)}(0) = 2,\ f^{(3)}(0) = 3,\ f^{(4)}(0) = 4.$$

(b) Trouver le polynôme de Taylor $P_{g,1,4}(x)$ d'une fonction g qui satisfait

$$g(1) = 0,\ g^{(1)}(1) = 1,\ g^{(2)}(1) = 2,\ g^{(3)}(1) = 3,\ g^{(4)}(1) = 4.$$

Par définition, le polynôme de Taylor à l'ordre 4 autour de x_0 est

$$P_{f,0,4}(x) = f(0)+f'(0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Remarquons qu'il suffit de connaître les valeurs successives des dérivées de f en x_0 pour pouvoir écrire le polynôme de Taylor. Ceci nous donne donc dans ces deux cas:

(a) Si $x_0 = 0$, tous les termes en $(x - x_0)^k$ seront substitués par x^k et les termes $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ seront remplacés par $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. on obtient alors

$$P_{f,0,4}(x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4.$$

(b) Si $x_0 = 1$, tous les termes en $(x - x_0)^k$ seront substitués par $(x - 1)^k$ et les termes $\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}$ seront remplacés par $\frac{g^{(k)}(1)}{k!}$. on obtient alors

$$P_{g,1,4}(x) = x - 1 + (x - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^3 + \frac{1}{6}(x - 1)^4.$$

2. Calculer le polynôme de Taylor $P_{\sqrt{x},x_0,1}(x)$, puis évaluer $P_{\sqrt{x},x_0,1}(2)$ pour

(a) $x_0 = \frac{25}{16}$, (b) $x_0 = \frac{49}{25}$.

Puisqu'on cherche le polynôme de Taylor à l'ordre 1 il faut calculer la première dérivée de $\sqrt{x}$ qu'on va ensuite évaluer en $x_0 = 0$. La dérivée de $\sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}x^{-1/2}$. Le polynôme de Taylor à l'ordre 1 sera donc

$$P_{\sqrt{x},x_0,1}(x) \quad = \quad \sqrt{x_0} + \frac{1}{2}x_0^{-\frac{1}{2}}(x - x_0).$$

En évaluant dans les valeurs de x_0 différentes, puis en posant $x = 2$, on obtient

(a)

$$\begin{aligned} P_{\sqrt{x},\frac{25}{16},1}(x) &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\frac{4}{5}(x - \frac{25}{16}) = \frac{5}{4} + \frac{2}{5}(x - \frac{25}{16}), \\ \Rightarrow_{x=2} \quad P_{\sqrt{x},\frac{25}{16},1}(2) &= \frac{5}{4} + \frac{2}{5}\frac{7}{16} = \frac{5}{4} + \frac{7}{40} = \frac{57}{40} \quad (= 1,425). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P_{\sqrt{x},\frac{49}{25},1}(x) &= \frac{7}{5}+\frac{1}{2}\frac{5}{7}(x-\frac{49}{25}) &= \frac{7}{5}+\frac{5}{14}(x-\frac{49}{25}), \\ \Rightarrow_{x=2} \quad P_{\sqrt{x},\frac{49}{25},1}(2) &= \frac{7}{5}+\frac{5}{14}\frac{1}{25}=\frac{7}{5}+\frac{1}{70}=\frac{495}{350} & (=1,414'285\ldots). \end{aligned}$$

3. Calculer les polynômes de Taylor à l'ordre 4 des fonctions suivantes autour de $x_0 = 0$:

(a) $f(x) = \frac{1}{1-x} - e^x$. (b) $g(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$.

Puisqu'on cherche le polynôme de Taylor à l'ordre 4 il faut calculer les quatre premières dérivées des fonctions f et g qu'on va ensuite évaluer en $x_0 = 0$.

(a) Les quatre premières dérivées de $f(x)$ sont

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - e^x, \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - e^x, \quad f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - e^x,$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{3\cdot 2}{(1-x)^4} - e^x, \quad f^{(4)}(x) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{(1-x)^5} - e^x.$$

En évaluent en $x_0 = 0$ et en divisant par $k!$ nous donnent les coefficients a_k du polynôme de Taylor:

$$a_0 = f(0) = 0, \quad a_1 = f^{(1)}(0) = 0, \quad a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{2},$$
$$a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{23}{24}.$$

Cela nous donne donc le polynôme de Taylor

$$P_{f,0,4}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{23}{24}x^4.$$

(b) Les quatre premières dérivées de $g(x)$ sont

$$g(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, \quad g^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right),$$
$$g^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}\left((1+x)^{-\frac{3}{2}} - (1-x)^{-\frac{3}{2}}\right),$$
$$g^{(3)}(x) = \frac{3}{8}\left((1+x)^{-\frac{5}{2}} + (1-x)^{-\frac{5}{2}}\right),$$
$$g^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}\left((1+x)^{-\frac{7}{2}} - (1-x)^{-\frac{7}{2}}\right).$$

En évaluent en $x_0 = 0$ et en divisant par $k!$ nous donnent les coefficients a_k du polynôme de Taylor:

$$a_0 = g(0) = 0, \quad a_1 = g^{(1)}(0) = 1, \quad a_2 = \frac{g^{(2)}(0)}{2!} = 0,$$
$$a_3 = \frac{g^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{8}, \quad a_4 = 0.$$

Cela nous donne donc le polynôme de Taylor

$$P_{g,0,4}(x) = x + \frac{1}{8}x^3.$$

4. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ on considère $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

(a) Montrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ et trouver le polynôme de Taylor autour de $x_0 = 0$ à l'ordre n.

(b) Montrer que $f(x) - P_{f,0,n}(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

(c) Pour quelles valeurs de x a-t-on donc $\lim_{n\to\infty} P_{f,0,n}(x) = f(x)$?

(a) Les premières dérives donnent (attention à tenir compte de la dérivée interne):

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On devine que pour $n \geq 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Puisqu'on a déjà initialisé cette égalité pour $n = 0, 1, 2$, il suffit maintenant de vérifier l'hérédité:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) &\underset{\text{hyp. réc}}{=} \frac{d}{dx} \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}. \end{aligned}$$

qui est bien la formule annoncée pour $n + 1$.
Pour trouver les coefficients a_k du polynôme de Taylor, on doit évaluer $f^{(k)}(x_0)$ en $x_0 = 0$ et diviser par $k!$:

$$a_0 = 1, \quad a_k = \frac{k!}{1^{k+1}} \frac{1}{k!} = 1.$$

On obtient alors pour le polynôme de Taylor

$$P_{\frac{1}{1-x},0,n}(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

(b) Le polynôme de Taylor pour $\frac{1}{1-x}$ n'est donc autre que la série géométrique partielle à l'ordre n.
Or, on sait du premier semestre (séries géométriques), que

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) - P_{f,0,n}(x) &= \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}. \end{aligned}$$

(c) Pour un $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ fixé, on trouve par le point précédent:

$$\Big|\frac{1}{1-x} - P_{\frac{1}{1-x},0,n}(x)\Big| = \Big|\frac{x^{n+1}}{1-x}\Big| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|}.$$

La valeur de $\frac{1}{1-x}$ est fixée pour un x fixé lui aussi. Par contre,

$$\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1, \\ \infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

On a donc que

$$\lim_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{1-x} - P_{\frac{1}{1-x},0,n}(x)\Big| = 0 \quad \text{ssi} \quad |x| < 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} P_{\frac{1}{1-x},0,n}(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{ssi} \quad |x| < 1.$$

Cela confirme la convergence de la série géométrique.

5. (a) Montrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2}).$$

En déduire le polynôme de Taylor $P_{\sin,0,n}(x)$.

(b) Montrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sinh^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + (-1)^{k+1}e^{-x}\right).$$

En déduire le polynôme de Taylor $P_{\sinh,0,n}(x)$.

(a) La formule $\sin^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$ est clairement vraie pour $k = 0$. Cela initialise le raisonnement par récurrence.
Montrons l'hérédité:

$$\begin{aligned} \sin^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\sin^{(k)}(x) \underset{\text{hyp. réc.}}{=} \frac{d}{dx}\sin(x + k\frac{\pi}{2}) \\ &= \cos(x + k\frac{\pi}{2}) = \cos(x - \frac{\pi}{2} + (k+1)\frac{\pi}{2}) \\ &= \cos(\frac{\pi}{2} - x - (k+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(x + (k+1)\frac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

qui est bien la formule attendue pour $k+1$. On peut donc conclure par récurrence.
Les coefficients du polynôme de Taylor seront donc

$$a_k = \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\sin(0 + k\frac{\pi}{2})}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2l, \\ \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} & \text{si } k = 2l+1. \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$P_{\sin,0,n}(x) = \sum_{0 \le 2l+1 \le n} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1}.$$

(b) La formule

$$\sinh^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + (-1)^{k+1}e^{-x}\right)$$

est sûrement vraie pour $k=0$, puisqu'elle se lit dans ce cas là:

$$\sinh^{(0)}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + (-1)^1 e^{-x}\right) = \sinh(x).$$

Cela initialise le raisonnement par récurrence.
Montrons l'hérédité:

$$\begin{aligned}\sinh^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\sinh^{(k)}(x) \underset{\text{hyp. réc.}}{=} \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\left(e^x + (-1)^{k+1}e^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^x - (-1)^{k+1}e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + (-1)^{k+2}e^{-x}\right),\end{aligned}$$

qui est bien la formule annoncée pour $k+1$. On conclut par récurrence.
Les coefficients du polynôme de Taylor seront donc

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{\sinh^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\frac{1}{2}\left(e^0 - (-1)^{k+1}e^{-0}\right)}{k!}\\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(1-(-1)^{k+1}\right)}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2l,\\ \frac{1}{(2l+1)!} & \text{si } k = 2l+1.\end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$P_{\sinh,0,n}(x) = \sum_{0\le 2l+1\le n} \frac{1}{(2l+1)!}x^{2l+1}.$$

6. (a) Vérifier par récurrence que

$$\frac{d^n}{dx^n}\sqrt{x} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}x^{\frac{1}{2}-n}.$$

(b) Ecrire le polynôme de Taylor pour $\sqrt{x}$ autour de $x_0 = 1$ à l'ordre n.

(a) Pour $n=1$, on a

$$\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}x^{\frac{1-2n}{2}}\Big|_{n=1} = \frac{(-1)^{1-1}(2-2)!}{2^{2-1}(1-1)!}x^{\frac{1-2}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}},$$

ce qui est bien la première dérivée de $\sqrt{x}$.

On suppose maintenant le résultat vrai pour n et on calcule

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\sqrt{x} &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^n}{dx^n}\sqrt{x}\Big) \\
&=_{\text{hyp. réc}} \frac{d}{dx}\Big(\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}x^{\frac{1-2n}{2}}\Big) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}x^{\frac{1-2n}{2}-1}\frac{1-2n}{2} \\
&= \frac{(1-2n)(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1+1}(n-1)!}x^{\frac{1-2n-2}{2}} \\
&= \frac{(2n-1)(-1)^{n+1-1}(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!}x^{\frac{1-2n-2}{2}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1-1}2n(2n-1)(2n-2)!}{2n2^{2n}(n-1)!}x^{\frac{1-2n-2}{2}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1-1}(2(n+1)-2)!}{2^{2(n+1)-1}((n+1)-1)!}x^{\frac{1-2(n+1)}{2}},
\end{aligned}$$

qui est bien la formule attendue pour $n+1$.

(b) Pour $x_0 = 1$, on a donc

$$\begin{aligned}
P_{\sqrt{x},1,n}(x) &= \sqrt{1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\Big(\frac{d^k}{dx^k}\sqrt{x}\Big)\Big|_{x=1}(x-1)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!}(x-1)^k.
\end{aligned}$$