Corrigé de la Série 12

2.4. Fonctions Hyperboliques

1. Démontrer que
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh x \tanh(y)}.$$

En reprenant la définition de la tangente hyperbolique, suivi des règles d'addition pour les fonctions hyperboliques, on obtient

$$\begin{aligned}
\tanh(x+y) = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} &= \frac{\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)} \\
&= \frac{\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}+\frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}}{1+\frac{\sinh(x)\sinh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)}} \qquad \text{(diviser par } \cosh(x)\cosh(y)\text{)} \\
&= \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}.
\end{aligned}$$

2. On se donne les points suivants das $\mathbb{R}^2$:
$$P(\sqrt{2},1), \quad Q(\sqrt{3},\sqrt{2}), \quad R(2,\sqrt{3}).$$

(a) Vérifier que ces trois points se situent sur l'hyperbole d'équation $x^2-y^2=1$.

(b) Trouver des paramètres t_P, t_Q et t_R, tels que $P=(\cosh(t_P),\sinh(t_P))$, $Q=(\cosh(t_Q),\sinh(t_Q))$ et $R=(\cosh(t_R),\sinh(t_R))$

(a) l'hyperbole H d'équation $x^2-y^2=1$ est le lieu des points $P(x,y)$ dont les coordonnées x et y vérifient précisément l'équation en question. On vérifie alors pour chaque point:

- $P(\sqrt{2},1)$: $\left(\sqrt{2}\right)^2-(1)^2=2-1=1. \Rightarrow P\in H.$
- $Q(\sqrt{3},\sqrt{2})$: $\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2=1. \Rightarrow Q\in H.$
- $R(2,\sqrt{3})$: $(2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-2=1. \Rightarrow R\in H.$

(b) Pour trouver $t\in\mathbb{R}$ tel que $(x,y)=(\cosh(t),\sinh(t))$, on doit avoir par parité

$$\cosh(t)+\sinh(t)=\exp(t)=x+y, \quad \cosh(t)-\sinh(t)=\exp(-t)=x-y.$$

Noter que

- si l'égalité $\cosh(t)+\sinh(t)=\exp(t)=x+y$ est vérifiée
- et si $x^2-y^2=1$,

alors la deuxième égalité, à savoir $\cosh(t) - \sinh(t) = \exp(-t) = x - y$, sera automatiquement vérifiée aussi, puisque

$$e^{-t} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = x - y.$$

Il suffit donc de résoudre

$$x + y = e^t \quad \Leftrightarrow \quad t = \ln(x+y).$$

On a alors pour chaque point:

- $t_P = \ln(\sqrt{2} + 1)$,
- $t_Q = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$,
- $t_R = \ln(\sqrt{3} + 2)$.

(3) Résoudre

(a) $\sinh(x) = 1$. (b) $\cosh(y) = 2$. (c) $\tanh(t) = \frac{1}{2}$.

(a) Par définition du sinh:

$$\sinh(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2e^x - 1 = 0.$$

On pose alors $u = e^x$ (noter que $u > 0$). Résolvons d'abord

$$u^2 - 2u - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Comme $u = e^x > 0$, on ne retient que la solution positive: $u = 1 + \sqrt{2}$. Par prise du logarithme, on obtient $x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

(b) Par définition du cosh:

$$\cosh(y) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad e^y + e^{-y} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2y} - 4e^y + 1 = 0.$$

On pose alors $u = e^y$ (noter que $u > 0$). Résolvons d'abord

$$u^2 - 4u + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Les deux valeurs de u sont positives et on a donc les deux solutions

$$y_+ = \ln(2 + \sqrt{3}), \quad y_- = \ln(2 - \sqrt{3}).$$

(On remarque d'ailleurs, que $y_+ = -y_-$, puisque

$$y_- = \ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}) = -\ln(2 + \sqrt{3}) = -y_+,$$

où on a amplifié la fraction argument du ln par $2 + \sqrt{3}$.)

(c) Par définition de la tanh:

$$\tanh(t) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\left(e^t - e^{-t}\right) = e^t + e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad e^t - 3e^{-t} = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{2t} - 3 = 0.$$

On pose alors $u = e^t$ (noter que $u > 0$). Résolvons d'abord

$$u^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \pm\sqrt{3}.$$

Comme $u = e^t > 0$, on ne retient que la solution positive: $u = \sqrt{3}$.
Par prise du logarithme, on obtient $t = \ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln(3)$.

4. Résoudre :

(a) $\cosh x + 2\sinh x = 3$

(b) $\sinh\frac{x}{2} + \cosh\frac{x}{2}\coth x = -\frac{7}{6}e^{-\frac{x}{2}}$

(a) En partant de la définition des fonctions hyperboliques on a

$$\cosh(x) + 2\sinh(x) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + 2\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = 3$$
$$\Leftrightarrow \quad 3e^x - e^{-x} - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3e^{2x} - 1 - 6e^x = 0.$$

On pose $u := e^x > 0$ et on résout d'abord

$$3u^2 - 1 - 6u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3},$$

dont on retient que la solution positive ($u > 0$) $u = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. Après prise du logarithme on trouve

$$x = \ln(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}) = \ln(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}).$$

(b) A cause de la présence de la $\coth(x)$, il faut faire attention au domaine de définition. En effet, il faut se restreindre à $\mathrm{D}_{\mathrm{def}} = \mathbb{R}^*$.
Sur ce domaine, on part à nouveau des définitions:

$$\sinh\frac{x}{2} + \cosh\frac{x}{2}\coth x = -\frac{7}{6}e^{-\frac{x}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sinh\frac{x}{2} + \cosh\frac{x}{2}\frac{\cosh x}{\sinh x} = -\frac{7}{6}e^{-\frac{x}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sinh\frac{x}{2}\sinh x + \cosh\frac{x}{2}\cosh x = -\frac{7}{6}e^{-\frac{x}{2}}\sinh x,$$

où pour la dernière étape, on a multilplié l'équation par $\sinh x$.
Le terme de gauche peut maintenant se simplifier par la formule d'addition des fonctions hyperboliques et on obtient

$$\cosh\frac{3x}{2} = -\frac{7}{6}e^{-\frac{x}{2}}\sinh x \quad \Leftrightarrow \quad 6\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3x}{2}} + e^{\frac{-3x}{2}}\right) + 7e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 6e^{\frac{3x}{2}} - e^{\frac{-3x}{2}} + 7e^{\frac{x}{2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{-3x}{2}}\left(6e^{3x} - 1 + 7e^{2x}\right) = 0.$$

Comme $e^{\frac{-3x}{2}} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on. doit résoudre $6e^{3x} - 1 + 7e^{2x} = 0$.
A nouveau, on pose $u = e^x$ et l'équation devient $6u^3 + 7u^2 - 1 = 0$. On remarque que $u = -1$ est une solution particulière de cette équation qui peut donc être factorisée par $(u + 1)$:

$$6u^3 + 7u^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u + 1)(6u^2 + u - 1) = 0.$$

On calcule les racines pour la dernière parenthèse par le discriminant:

$$u_\pm = \frac{-1 \pm 5}{12}.$$

On a donc les solutions $\{-1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\}$, dont on ne garde que la solution positive, puisque $u = e^x$. En appliquant le logarithme on trouve finalement

$$x = \ln(\frac{1}{3}) = -\ln(3).$$

5. Exprimer $\cosh(2x)$ en fonction de $t = \tanh x$.

Par la formule des additions des fonction hyperboliques, on a

$$\cosh(2x) = \cosh(x)\cosh(x) + \sinh(x)\sinh(x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x).$$

L'égalité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ nous permet en plus de simplifier cette égalité en

$$\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1.$$

D'autre part,

$$t^2 = \tanh^2(x) = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - 1}{\cosh^2(x)},$$

où pour la dernière égalité nous avons à nouveau utilisé $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
On peut donc extraire $\cosh^2(x)$:

$$t^2 = \frac{\cosh^2(x) - 1}{\cosh^2(x)} \quad \Leftrightarrow \quad t^2\cosh^2(x) = \cosh^2(x) - 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \cosh^2(x)\left(t^2 - 1\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \cosh^2(x) = \frac{1}{1 - t^2}.$$

En combinant ces égalités, on obtient

$$\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1 \quad \text{et} \quad \cosh^2(x) = \frac{1}{1 - t^2}$$
$$\Rightarrow \quad \cosh(2x) = \frac{2}{1 - t^2} - 1 = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}.$$

6. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)}\right)^n = \frac{1 + \tanh(nx)}{1 - \tanh(nx)}.$$

En partant de la définition de la $\tanh(x)$, on trouve

$$\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)} = \frac{1+\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}{1-\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}} = \frac{\frac{\cosh(x)+\sinh(x)}{\cosh(x)}}{\frac{\cosh(x)-\sinh(x)}{\cosh(x)}} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x},$$

où nous avons utilisé la parité des fonctions hyperboliques.
Similairement, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)} = \frac{1+\frac{\sinh(nx)}{\cosh(nx)}}{1-\frac{\sinh(nx)}{\cosh(nx)}} = \frac{\frac{\cosh(nx)+\sinh(nx)}{\cosh(nx)}}{\frac{\cosh(nx)-\sinh(nx)}{\cosh(nx)}} = \frac{e^{nx}}{e^{-nx}} = e^{2nx}.$$

Ainsi,

$$\Big(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\Big)^n = (e^{2x})^n = e^{2nx} = \Big(\frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}\Big).$$

7. Démontrer les inégalités suivantes:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sinh(x) \geq x.$ (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$

(a) Dire que $\sinh(x) \geq x$ revient à dire que $\sinh(x) - x \geq 0$.
On pose alors $f(x) := \sinh(x) - x$.
Par dérivation on obtient $f'(x) = \cosh(x) - 1$.
Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) \geq 1$ on trouve que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$.
Par le théorème des accroissement finis, on trouve alors que pour $0 < x$,

$$f(x) = f(0) + xf'(\xi), \qquad \text{pour un certain } \xi \in]0, x[.$$

Mais on vient de remarquer que $f'(\xi) \geq 0$, d'où $f(x) \geq f(0) = 0$ pour tout $x > 0$.
Bien sûr, $f(0) = \sinh(0) - 0 = 0 \geq 0$. On a donc bien

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, \quad f(x) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \geq 0, \quad \sinh(x) - x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \geq 0, \quad \sinh(x) \geq x. \end{aligned}$$

(b) Dire que $\cosh(x) \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$ revient à dire que $\cosh(x) - 1 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$.
On pose alors $g(x) := \cosh(x) - 1 - \frac{1}{2}x^2$.
Par dérivation on obtient $g'(x) = \sinh(x) - x$.
Or, on vient de montrer au point précédent que cette fonction est toujours positive pour $x \geq 0$.
On peut donc à nouveau invoquer le théorème des accroissements finis pour conclure, que

$$\forall x \geq 0, g(x) \geq g(0) = \cosh(0) - 1 = 0.$$

On a donc bien

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, \quad g(x) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \geq 0, \quad \cosh(x) - 1 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \geq 0, \quad \cosh(x) \geq 1 + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Par parité a pour $x \leq 0$ (et donc $-x \geq 0$)

$$\cosh(x) = \cosh(-x) \geq +\frac{1}{2}(-x)^2 = +\frac{1}{2}x^2.$$