

Série 12

2.4. Fonctions Hyperboliques

1. On rappelle les deux formules d'addition suivantes :

$$\begin{cases} \sinh(x+y) &= \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) \end{cases}$$

Démontrer que

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh x \tanh(y)}.$$

2. On se donne les points suivants dans \mathbb{R}^2 :

$$P(\sqrt{2}, 1), \quad Q(\sqrt{3}, \sqrt{2}), \quad R(2, \sqrt{3}).$$

- (a) Vérifier que ces trois points se situent sur l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.
 (b) Trouver des paramètres t_P , t_Q et t_R , tels que $P = (\cosh(t_P), \sinh(t_P))$, $Q = (\cosh(t_Q), \sinh(t_Q))$ et $R = (\cosh(t_R), \sinh(t_R))$

3. Résoudre

$$(a) \sinh(x) = 1. \quad (b) \cosh(y) = 2. \quad (c) \tanh(t) = \frac{1}{2}.$$

4. Résoudre :

$$(a) \cosh x + 2 \sinh x = 3 \quad (b) \sinh \frac{x}{2} + \cosh \frac{x}{2} \coth x = -\frac{7}{6} e^{-\frac{x}{2}}$$

5. Exprimer $\cosh(2x)$ en fonction de $t = \tanh x$.

(**Indication:** Ecrire $\cosh^2(x)$ en fonction de $t^2 = \tanh^2(x)$.)

6. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)} \right)^n = \frac{1 + \tanh(nx)}{1 - \tanh(nx)}.$$

(**Indication:** Simplifier l'expression entre parenthèses pour l'exprimer avec une exponentielle.)

7. Démontrer les inégalités suivantes:

$$(a) \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sinh(x) \geq x. \quad (b) \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

(**Indication:** Dériver la différence entre les fonctions à comparer.)

Solutions

S2 • $t_P = \ln(\sqrt{2} + 1)$,
 • $t_Q = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$,
 • $t_R = \ln(\sqrt{3} + 2)$.

S3 (a) $x = \ln(1 + \sqrt{2})$,
 (b) $y_{\pm} = \ln(2 \pm \sqrt{3})$,
 (c) $t = \frac{1}{2} \ln(3)$.

S4 (a) $x = \ln(1 + \frac{2}{\sqrt{3}})$.
 (b) $x = -\ln(3)$

S5 $\cosh(2x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Est-ce que je connais la définition des fonction hyperboliques?
2. Ai-je compris la notion de parité d'une fonction?
3. Est-ce que je vois le rapport entre les fonctions hyperboliques et l'exponentielle? Pourquoi l'appellation "hyperbolique"?
4. Ai-je réussi à résoudre les égalités proposées, impliquant les fonction hyperboliques et l'exponentielle?
5. Est-ce que j'arrive à visualiser graphiquement les fonctions hyperboliques? Est-ce que je connais leur comportement asymptotique?
6. Puis-je calculer les dérivées des fonction hyperboliques?