

**EPFL****1****Enseignant·es: Dubuis, Huruguen, Khukhro****Analyse 2 - CMS****10 janvier 2024****Durée : 105 minutes**

Robin des Bois

SCIPER : 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
les points indiqués si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/>		



Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bisection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\begin{aligned}\cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)] \\ \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]\end{aligned}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \tan x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

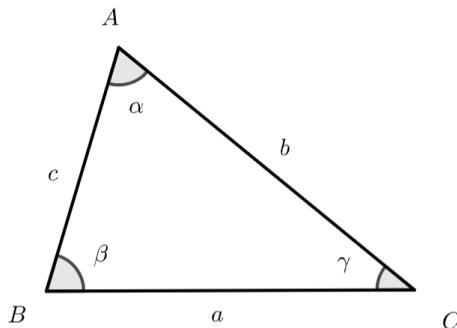


Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

Pour les **Questions 1, 2 et 3** on considère un triangle ABC comme ci-dessous dans le plan et on utilise les notations indiquées sur le dessin.



Question 1 (2 points)

Dans cette question on suppose que $a = 6$, $b = 2$ et $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Quelle est la valeur exacte de α ?

- $\pi - \arcsin\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ $\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)$ $\arcsin\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ $\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)$

Question 2 (1 point)

Si l'on a l'égalité $c = 2b$, laquelle des relations suivantes est certainement vérifiée ?

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\sin(\gamma) = 2 \sin(\beta)$ | <input type="checkbox"/> $\cos(\gamma) = 2 \cos(\beta)$ |
| <input type="checkbox"/> $\sin(\gamma) = \frac{1}{2} \sin(\beta)$ | <input type="checkbox"/> $\cos(\gamma) = \frac{1}{2} \cos(\beta)$ |

Question 3 (2 points)

Dans cette question on suppose que $a = 4$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ et $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Quelle est la valeur exacte de b ?

- $2\sqrt{3}$ $\frac{2}{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ $2 \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

**Question 4** (2 points)

La solution de l'équation

$$\cos(x) = \frac{-1}{8}, x \in [-7\pi, -6\pi]$$

est donné par

- $x = -\arcsin\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{13\pi}{2}.$
- $x = \arcsin\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{\pi}{2}.$
- $x = -\arcsin\left(\frac{1}{8}\right) - 7\pi.$

- $x = \arccos\left(\frac{-1}{8}\right) - 7\pi.$
- $x = \arccos\left(\frac{-1}{8}\right).$
- $x = \arcsin\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{13\pi}{2}.$

Question 5 (2 points)La fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \tan\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

est bijective pour quel choix d'ensemble de départ D ?

- $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
- $D =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$
- $D =]-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}[$

- $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $D =]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$
- $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

**Question 6** (3 points)

On définit A comme la surface délimitée par la courbe $y = \frac{x-1}{x-2}$, et les droites $x = 4$, $x = 5$, et $y = -1$.

Quelle est l'aire géométrique (positive, non signée) de la surface A ?

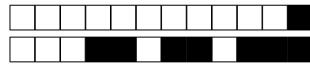
- | | | |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\ln(3) - \ln(2)$ | <input type="checkbox"/> $1 + \ln(3) - \ln(2)$ | <input type="checkbox"/> $1 + \ln(5) - \ln(4)$ |
| <input type="checkbox"/> $1 + \ln(6) - \ln(5)$ | <input type="checkbox"/> $\ln(5) - \ln(4)$ | <input type="checkbox"/> $2 + \ln(5) - \ln(4)$ |
| <input type="checkbox"/> $2 + \ln(6) - \ln(5)$ | <input type="checkbox"/> $\ln(6) - \ln(5)$ | <input type="checkbox"/> $2 + \ln(3) - \ln(2)$ |

Question 7 (3 points)

Trouver l'ensemble solution S de l'inéquation

$$4^x - 7 \cdot 2^x \leq -12.$$

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $S = [\log_2(7), \log_2(12)]$ | <input type="checkbox"/> $S =]-\infty, \log_3(2)] \cup [2, +\infty[$ |
| <input type="checkbox"/> $S = [1, +\infty[$ | <input type="checkbox"/> $S = [3, 4]$ |
| <input type="checkbox"/> $S = [\log_2(3), 2]$ | <input type="checkbox"/> $S = [\log_3(2), 2]$ |
| <input type="checkbox"/> $S = [\log_4(3), 3]$ | <input type="checkbox"/> $S = \mathbb{R}$ |



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

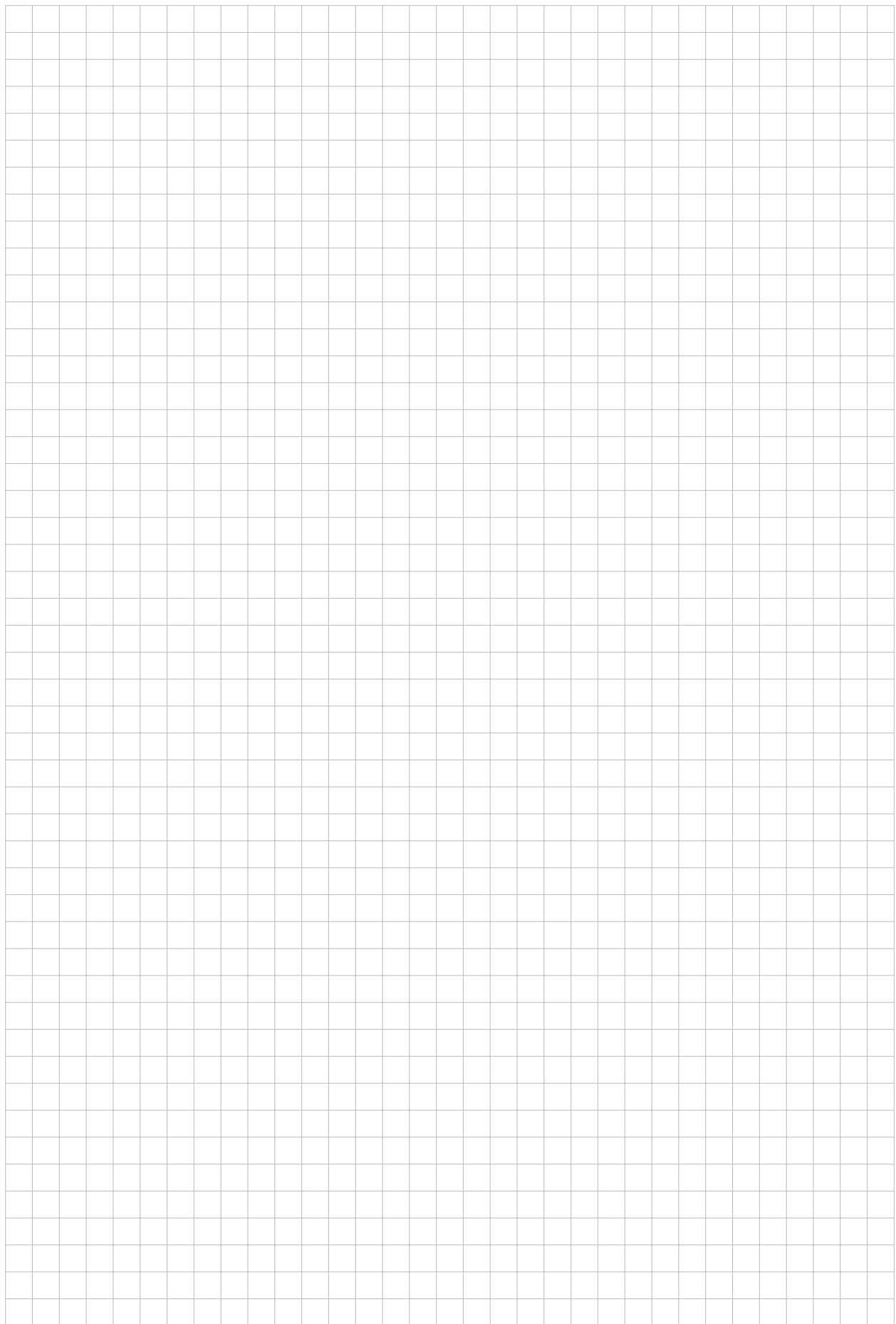
<input type="checkbox"/> .5					
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5

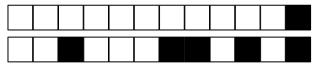
Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2 \arccos(2x) + \arccos\left(3x + \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

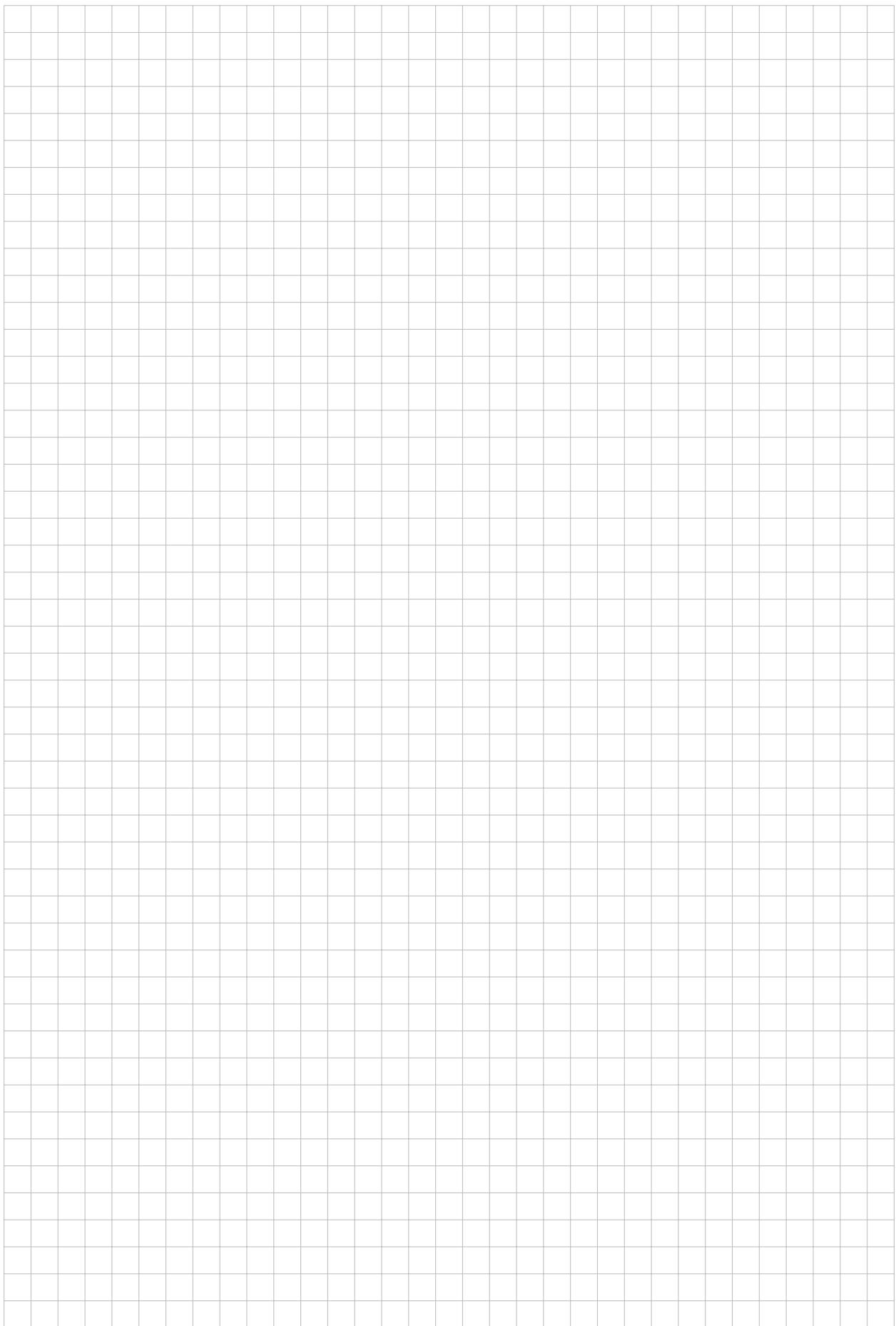


+1/7/54+





+1/8/53+



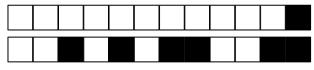


Question 9: Cette question est notée sur 5 points.

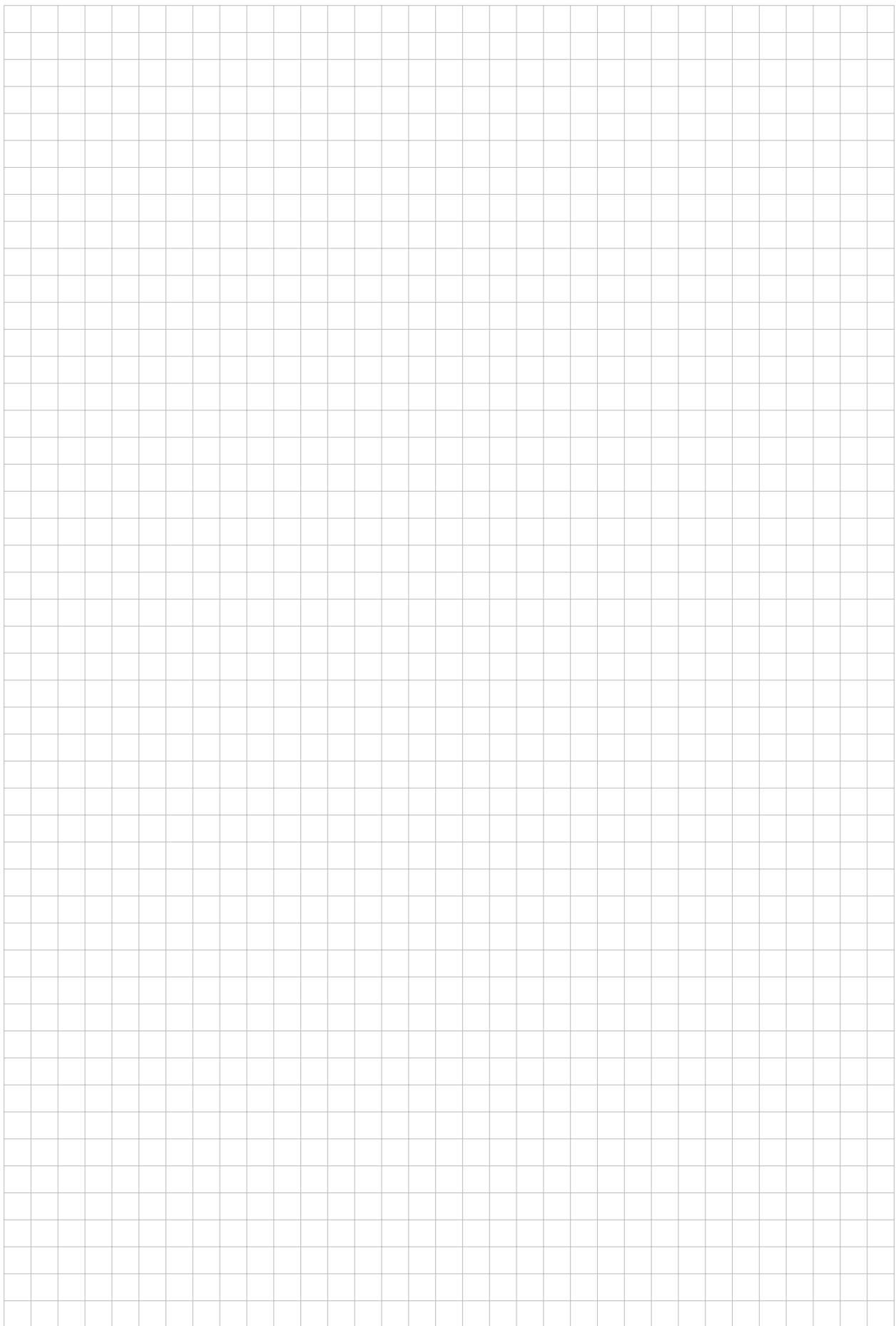
<input type="checkbox"/>	.5									
<input type="checkbox"/> 0		<input type="checkbox"/> 1		<input type="checkbox"/> 2		<input type="checkbox"/> 3		<input type="checkbox"/> 4		<input type="checkbox"/> 5

Résoudre par rapport à x l'inéquation suivante :

$$2 \log_{\frac{2}{5}} \left(x - \frac{5}{2} \right) \leq -1 - \log_{\frac{2}{5}}(10).$$

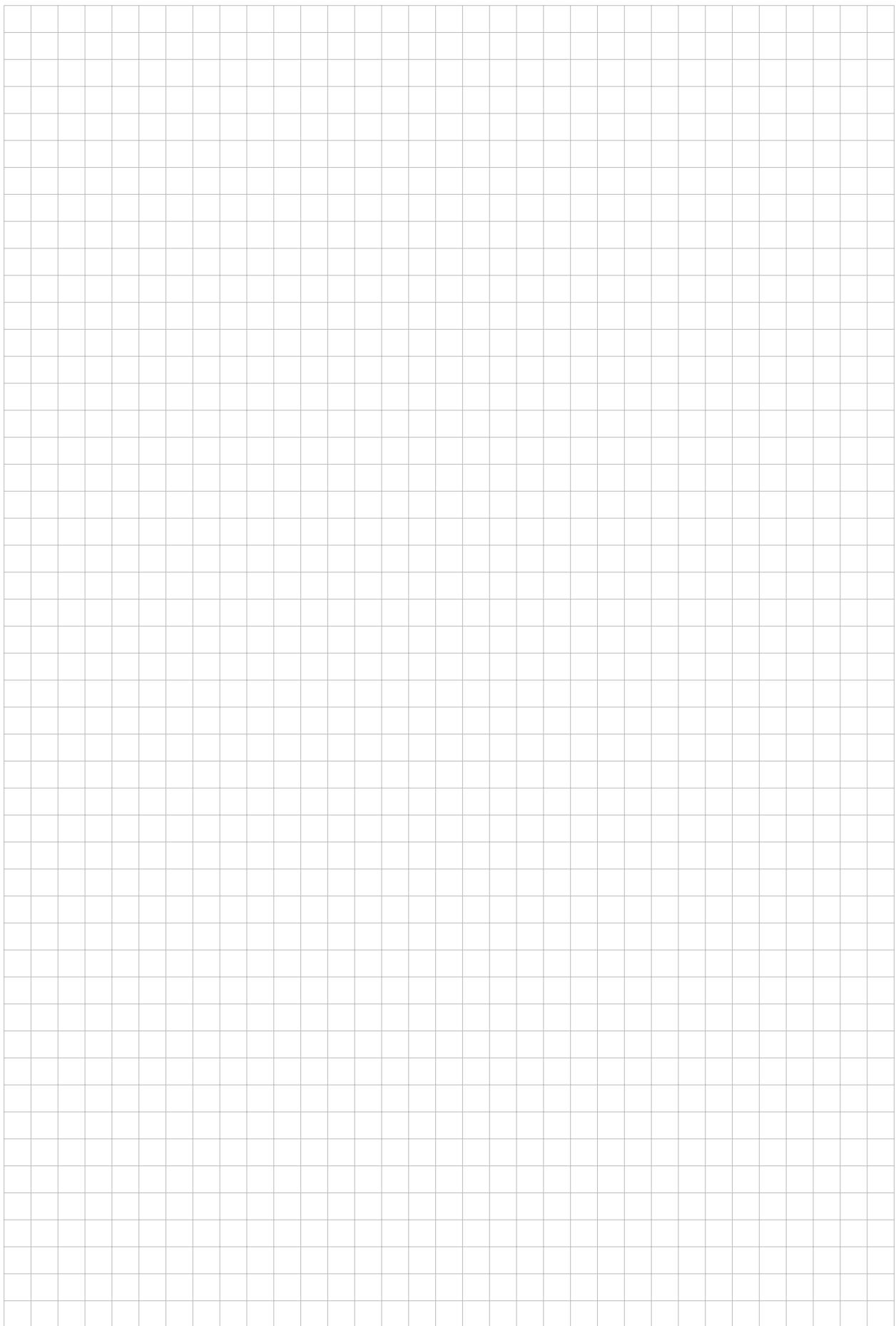


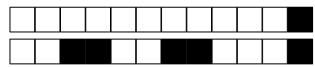
+1/10/51+





+1/11/50+





+1/12/49+