



1

Enseignant-es: Bossoney, Dubuis, Khukhro
Analyse 2 - CMS
12 janvier 2023
Durée : 105 minutes

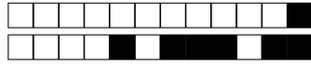
Analyse 2

SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien					
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren			
  		 			
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte					
					



Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bisection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\begin{aligned}\cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)] \\ \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]\end{aligned}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \tan x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$



Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)

La solution de l'équation $\sin(x) = \frac{1}{3}, x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$, est

- $x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.
- $x = -\pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.
- $x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{3\pi}{2}$.
- $x = -\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.

Correction : Les solutions générales sont données par $x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + k2\pi$ ou $x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + k2\pi$. Puis on applique la localisation. Alternative : localiser les réponses et vérifier l'équation.

Question 2 (2 points)

On définit A comme la surface délimitée par les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ d'équations

$$\Gamma_1 : y = \frac{1+|x|}{x}, x \neq 0, \quad \Gamma_2 : x = -2, \quad \Gamma_3 : x = -1, \quad \Gamma_4 : y = 0.$$

Quelle est l'aire géométrique (aire positive, non signée) de la surface A ?

- $2 - \ln(2)$
- $1 + \ln(2)$
- $1 - \ln(2)$
- $\ln(2)$

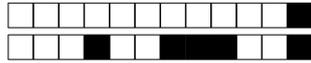
Correction : On simplifie $\frac{1+|x|}{x} = \frac{1}{x} + \operatorname{sgn}(x)$. Comme on travaille dans une zone $x < 0$, la courbe est donc $\frac{1}{x} - 1$ et donc une translation vers le bas de 1. Par symétrie on identifie l'aire avec l'aire sous la courbe $\frac{1}{x} + 1$ pour x entre 1 et 2.

Question 3 (2 points)

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ est bijective sur l'intervalle

- $\left[\frac{-7\pi}{9}, \frac{-4\pi}{9}\right]$
- $\left[\frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\right]$
- $\left[\frac{43\pi}{18}, \frac{49\pi}{18}\right]$
- $\left[\frac{-11\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right]$

Correction : Si on note $g(x) = 3x - \frac{\pi}{6}$, on vérifie que l'image par g de $\left[\frac{43\pi}{18}, \frac{49\pi}{18}\right]$ est $[7\pi, 8\pi]$ qui est une détermination du cosinus.

**Question 4** (2 points)

L'équation $2^{2x} - 2^x + 2^{3x} = 0, x \in \mathbb{R}$ possède

- exactement une solution.
- exactement trois solutions.
- aucune solution.
- exactement deux solutions.

Correction : On pose le changement de variable $z = 2^x$ et on résout $z^2 - z + z^3 = z(z^2 + z - 1) = 0$ qui a trois solutions, dont une seule est strictement positive.

Question 5 (2 points)

La solution de l'équation $\cos(x) = \frac{3}{5}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est

- $x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.
- $x = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.
- $x = -\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.
- $x = \pi - \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.

Correction : Résoudre l'équation puisse transformer $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ en $\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$. Alternative localiser les réponses et vérifier.

