Série 7

1. Résoudre les triangles ABC dans les trois cas suivants :

a) $a = 4\,,\ b = 7$ et $c = 10\,,$

b) $a = 12\,,\ b = 18$ et $\gamma = 53°\,,$

c) $a = 5\,,\ \beta = 114°$ et $\gamma = 31°\,.$

2. D'un triangle ABC, on ne connaît que les côtés a, c et l'angle α :
$a = 7\ ,\ c = 10$ et $\alpha = 30°\,.$

a) Résoudre le triangle (la solution est-elle unique ?)

b) Construire la (les) solution(s).

3. Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on fait le choix de deux points A et B distants de d mètres.

On mesure les angles $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et l'angle d'élévation δ sous lequel on voit C depuis A.

Sachant que A est au bord de la mer, calculer l'altitude de C.

Application numérique : $d = 1000\,\mathrm{m}$, $\alpha = 50°$, $\beta = 115°$ et $\delta = 35°\,.$

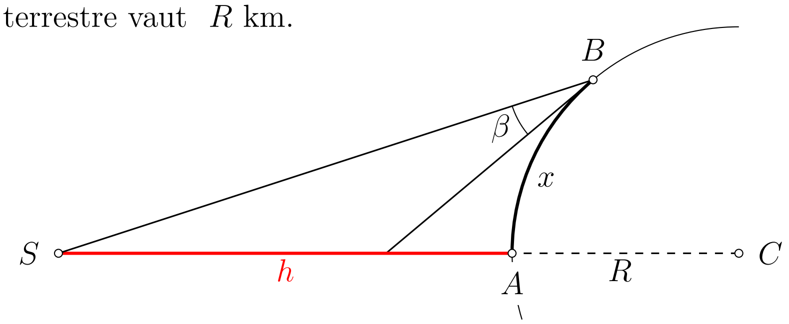
4. Résoudre le triangle ABC dont on connaît : $\sigma = b + c$, β et γ.

Indication : exprimer σ en fonction de a et des trois angles.

5. Soient ABC un triangle et M le point milieu du côté BC.

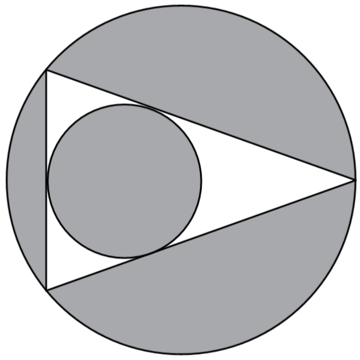
Déterminer la longueur de la médiane AM en fonction des côtés a, b et c.

6. Soient A et B deux points situés sur le même méridien terrestre et S un satellite passant à la verticale de A. Déterminer l'altitude $AS = h$ sachant que depuis B on observe S sous un angle β, que l'arc AB est de longueur x km et que le rayon terrestre vaut R km.



7. Dix réverbères, placés à intervalles égaux, se suivent sur toute la longueur d'un pont. Un passant situé à 30 mètres du premier réverbère voit la distance qui sépare celui-ci du quatrième, sous un angle de $30°$, et la distance qui sépare le quatrième du dernier réverbère, sous un angle de $120°$. Quelle est la longueur du pont ?

8. Trouver l'aire grisée dans l'image suivante en fonction des longueurs des côtés du triangle a, b et c, et du demi-périmètre $p = \frac{a+b+c}{2}$.



Réponses de la série 7

1. a) $\alpha \approx 18,2°$, $\beta \approx 33,1°$ et $\gamma \approx 128,7°$,

b) $c \approx 14,4$, $\alpha \approx 41,6°$ et $\beta \approx 85,4°$,

c) $\alpha = 35°$, $b \approx 8$ et $c \approx 4,5$.

2. Il y a deux solutions, elles correspondent toutes les deux à $\sin\gamma = \frac{5}{7}$.

- $\gamma \approx 45,6°$, $\beta \approx 104,4°$ et $b \approx 13,6$,
- ou $\gamma \approx 134,4°$, $\beta \approx 15,6°$ et $b \approx 3,8$.

3. $h = d \cdot \dfrac{\sin\beta \cdot \sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}$, application numérique : $h \approx 2'008\,\text{m}$.

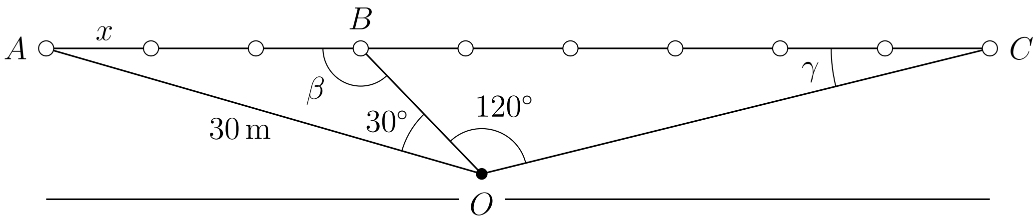
4. $a = \sigma \cdot \dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta + \sin\gamma}$, $b = \sigma \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\beta + \sin\gamma}$, $c = \sigma \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma}$.

5. $AM = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\,(b^2+c^2) - a^2}$.

Remarque : si le triangle ABC est rectangle en A, on retrouve le résultat : $AM = \frac{a}{2}$.

6. $h = R \cdot \left(\dfrac{\cos\beta}{\cos(\beta + \frac{x}{R})} - 1 \right)$.

7. Figure d'étude :



La longueur du pont est égale à $9x = 10\sqrt{39}$ m.

8. L'aire grisée est donnée par

$$\pi \left[\frac{(abc)^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \right] - \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$