Cours 9

Fonctions réciproques: exemples d'application

Exemple 3.8

Calculer $\varphi = \arctan(a) + \arctan(b)$ (cf. Série 8, Exercice 6).

- $\arctan(a)$ est l'unique angle appartenant à $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut a.
- $\arctan(b)$ est l'unique angle appartenant à $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut b.
- φ est donc l'unique angle appartenant à $]\pi, \pi[$ tel que

  $\tan(\varphi) = \tan(\arctan(a) + \arctan(b))$.

Pour $ab \neq 1$, on a

$$\tan(\arctan(a) + \arctan(b)) = \frac{\tan(\arctan(a)) + \tan(\arctan(b))}{1 - \tan(\arctan(a))\tan(\arctan(b))} = \frac{a+b}{1-ab}$$

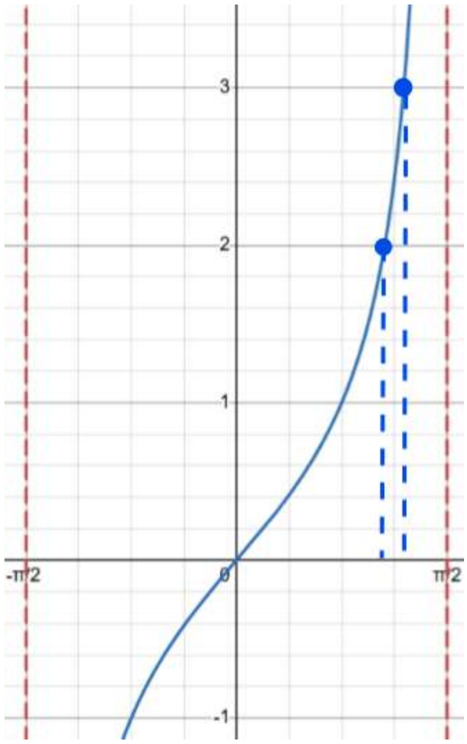
On a donc les possibilités suivantes:

- $\varphi \in \left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[$. Dans ce cas, $\varphi = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$.
- $\varphi \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Dans ce cas, $\varphi = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.
- $\varphi \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Dans ce cas, $\varphi = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$.

Si $ab = 1$, alors $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Exemple 3.9

Calculer $\varphi = \arctan(2) + \arctan(3)$.



On localise φ: $\arctan(2) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(3) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et donc $\varphi \in]0, \pi[$.

$\tan(\varphi) = \dfrac{\tan(\arctan(2)) + \tan(\arctan(3))}{1 - \tan(\arctan(2))\tan(\arctan(3))} = \dfrac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1.$

On a donc $\tan(\varphi) = -1$ et $\varphi \in]0, \pi[$, ce qui implique que $\varphi = \arctan(-1) + k\pi$, où $k = 0$ ou 1. Puisque $\arctan(-1) = \dfrac{-\pi}{4} + \pi$, on a donc

$$\varphi = \frac{-\pi}{4} + \pi.$$

Exemple 3.10

Calculer $\varphi = \arccos(x) + \arcsin(x)$, où $x \in [-1, 1]$.

On localise φ: $\arccos(x) \in [0, \pi]$, $\arcsin(x) \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $\varphi \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

On calcule $\sin(\varphi)$:

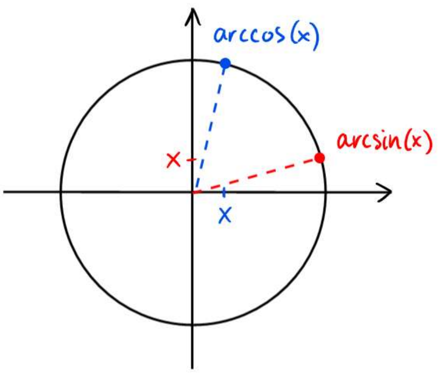
$$\begin{aligned}\sin(\varphi) &= \sin(\arccos(x)+\arcsin(x))\\ &= \sin(\arccos(x))\cos(\arcsin(x))+\cos(\arccos(x))\sin(\arcsin(x))\\ &= \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}+x\cdot x\\ &= 1-x^2+x^2=1.\end{aligned}$$

On a donc $\sin(\varphi)=1$ et $\varphi\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

$$\Longrightarrow \varphi = \begin{cases}\arcsin(1)+2\pi k=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\\ \text{ou}\\ \pi-\arcsin(1)+2\pi k=\pi-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases} \qquad \text{et } \varphi\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$$

On a donc $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Remarque: la réponse est indépendante de $x\in[-1,1]$. En effet, on voit géométriquement que $\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}\ \forall x\in[-1,1]$.



Exemple 3.11

Résoudre $\arcsin(x)+\arcsin(\sqrt{3}x)=\frac{5\pi}{6}$.

$D_{def}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in[-1,1] \text{ et } \sqrt{3}x\in[-1,1]\}=\left[\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Localisation: $\arcsin(x) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\arcsin(\sqrt{3}x) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{3}x) \in [-\pi, \pi]$. Puisque $\frac{5\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$, il peut y avoir des solutions.

On réécrit l'équation dans la forme

$$\arcsin(x) = \frac{5\pi}{6} - \arcsin(\sqrt{3}x)$$

et on applique sin à l'équation:

$$\sin(\arcsin(x)) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \arcsin(\sqrt{3}x)\right).$$

Attention: sin n'est pas injectif. On risque donc d'ajouter des fausses solutions. Il faut donc tester les solutions obtenues à la fin.

$$\begin{aligned}
&\arcsin(x) = \frac{5\pi}{6} - \arcsin(\sqrt{3}x) \\
\Longrightarrow\ &\sin(\arcsin(x)) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \arcsin(\sqrt{3}x)\right) \\
\Longleftrightarrow\ &x = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos(\arcsin(\sqrt{3}x)) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\sin(\arcsin(\sqrt{3}x)) \\
\Longleftrightarrow\ &x = \frac{1}{2}\sqrt{1-3x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}x \\
\Longleftrightarrow\ &2x = \sqrt{1-3x^2} + 3x \\
\Longleftrightarrow\ &-x = \sqrt{1-3x^2} \\
\Longleftrightarrow\ &x^2 = 1 - 3x^2 \text{ et } x \leq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &4x^2 = 1 \text{ et } x \leq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &x^2 = \frac{1}{4} \text{ et } x \leq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &x = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

On teste la solution dans l'équation:

$$\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\pi}{6} + \frac{-\pi}{3} = \frac{-\pi}{2} \neq \frac{5\pi}{6}.$$

Donc $S = \emptyset$.

Remarque 3.12

On a réécrit l'équation dans la forme $\arcsin(x) = \frac{5\pi}{6} - \arcsin(\sqrt{3}x)$ car appliquer sin à l'équation originale $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{3}x) = \frac{5\pi}{6}$ mène à une équation beaucoup plus compliquée à résoudre.

Exemple 3.13

Résoudre $2\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{-5\pi}{6}$.

$D_{def} = \mathbb{R}$.

Localisation: $\arctan(x) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ implique que $2\arctan(x) \in]-\pi, \pi[$, et $\arctan(\sqrt{3}x) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $2\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) \in \left]\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Puisque $\frac{5\pi}{6} \in \left]\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, il peut y avoir des solutions.

On réécrit l'équation dans la forme

$$2\arctan(x) = \frac{-5\pi}{6} - \arctan(\sqrt{3}x)$$

et on applique tan à l'équation:

$$\tan(2\arctan(x)) = \tan\left(\frac{-5\pi}{6} - \arctan(\sqrt{3}x)\right)$$

Attention: tan n'est pas injectif et n'est pas défini partout. Il faut donc tester les solutions obtenues à la fin pour éviter des fausses solutions, et tester les valeurs non incluses, auxquelles on ne peut pas appliquer cette méthode.

Valeurs non incluses:

- $2\arctan(x) = \frac{\pi}{2} + \pi k \iff \arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \iff x = \pm 1$
- $\frac{-5\pi}{6} - \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{\pi}{2} + \pi k \iff \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{\pi}{3} + \pi k \iff$
  $\sqrt{3}x = \sqrt{3} \iff x = 1$.

On a

$$
\begin{aligned}
&2\arctan(x) = \frac{-5\pi}{6} - \arctan(\sqrt{3}x)\\
\Longrightarrow\, &\tan(2\arctan(x)) = \tan\left(\frac{-5\pi}{6} - \arctan(\sqrt{3}x)\right)\\
\Longleftrightarrow\, &\frac{2\tan(\arctan(x))}{1-\tan^2(\arctan(x))} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \tan(\arctan(\sqrt{3}x))}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan(\arctan(\sqrt{3}x))}\\
\Longleftrightarrow\, &\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}x}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3}x}\\
\Longleftrightarrow\, &2x = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}x\right)(1-x^2)}{1+x}\\
\Longleftrightarrow\, &2x = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}x\right)(1-x)\\
\Longleftrightarrow\, &2x = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}x + \sqrt{3}x^2\\
\Longleftrightarrow\, &3x^2 - (4+2\sqrt{3})x + 1 = 0\\
\Longleftrightarrow\, &x = 2.3\ldots \text{ ou } x = 0.14\ldots
\end{aligned}
$$

On teste ces deux valeurs dans l'équation, ce ne sont pas des solutions.

On teste les valeurs non incluses ± 1 dans l'équation:

- $2\arctan(1) + \arctan(\sqrt{3}) = 2\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \neq \frac{-5\pi}{6}$
- $2\arctan(-1) + \arctan(-\sqrt{3}) = -2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{-5\pi}{6}$

Donc $S = \{-1\}$.

Exemple 3.14

On peut utiliser les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques pour trouver les fonction réciproques des fonctions plus compliquées. Par exemple, trouvons la réciproque de la fonction bijective

$$
\begin{aligned}
f : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] &\to [-3, 3]\\
x &\mapsto 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Pour trouver sa réciproque, on doit résoudre $f(x) = y$ en traitant y comme paramètre.

On a $3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = y \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{3}$, et puisque $\frac{y}{3} \in [-1, 1]$ et $x - \frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$, on a $x - \frac{\pi}{3} = \arccos\left(\frac{y}{3}\right)$, et donc $x = \arccos\left(\frac{y}{3}\right) + \frac{\pi}{3}$.

La fonction réciproque est donc

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-3, 3] &\to \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \\ x &\mapsto \arccos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$