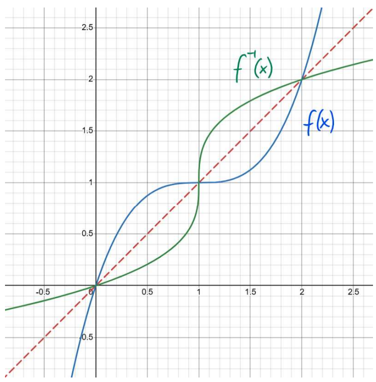
3 Fonctions trigonométriques réciproques

Soit $f : D_f \to \mathrm{Im}(f)$ une fonction bijective. On définit

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathrm{Im}(f) &\to D_f \\ x &\mapsto y \text{ tel que } f(y) = x. \end{aligned}$$

Il faut que f soit bijective pour que f^{-1} soit bien définie sur $\mathrm{Im}(f)$. On remarque que le graphe de f^{-1} peut être obtenu à partir du graphe de f par une réflexion par rapport à la droite $y = x$.



Fonction réciproque du sinus

La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est surjective mais pas injective. On peut restreindre l'ensemble de départ de plusieurs façons de sorte à ce que la fonction devienne injective. La fonction sin est injective sur les intervalles de la forme

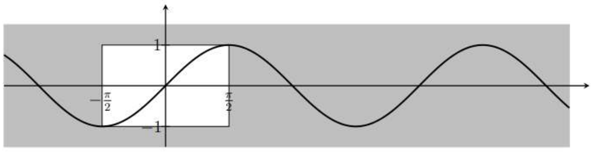
$$\left[\frac{-\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

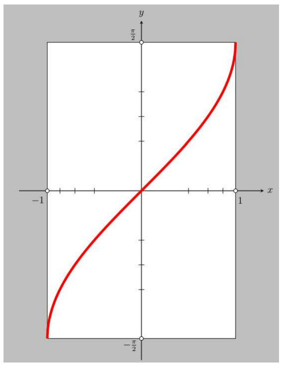
On choisit l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, appelé la *détermination principale* du sinus.

$\sin : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ est bijective et on note sa fonction réciproque

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \mapsto y \text{ tel que } \sin(y) = x.$$

$\arcsin(x)$ est donc l'unique angle appartenant à $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.





Propriétés de arcsin

- $\sin(\arcsin(x) = x \ \forall x \in [-1, 1]$
- $\arcsin(\sin(x)) \neq x$ en général. On a $\arcsin(\sin(x)) = x \iff x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
  Par exemple, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{-\pi}{6}$.
- $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$, c'est donc une fonction impaire.
- La fonction arcsin nous permet d'exprimer les solutions des équations avec des valeurs non remarquables:
  la solution générale de l'équation $\sin(x) = a$, $a \in [-1, 1]$ est

$$x = \begin{cases} \arcsin(a) + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \pi - \arcsin(a) + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemple 3.1

Résoudre $\sin(x) = \frac{-3}{4}$ pour $x \in [\pi, 2\pi]$.

Solution générale:

$$x = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{-3}{4}\right) + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \pi - \arcsin\left(\frac{-3}{4}\right) + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$\arcsin\left(\frac{-3}{4}\right) \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]$. Les solutions appartenant à $[\pi, 2\pi]$ sont donc

$$\left\{\arcsin\left(\frac{-3}{4}\right) + 2\pi, \pi - \arcsin\left(\frac{-3}{4}\right)\right\}.$$

Fonctions trigonométriques évaluées en $\arcsin(x)$

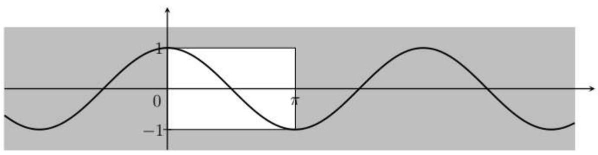
- $\sin(\arcsin(x)) = x$
- $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$
  On a choisi la racine positive car $\arcsin(x) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow \cos(\arcsin(x)) \geq 0$.
- $\tan(\arcsin(x) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ pour $x \neq \pm 1$.

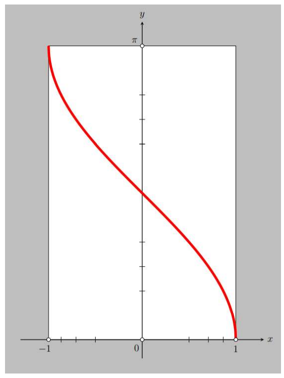
Fonction réciproque du cosinus

La *détermination principale* du cosinus est $[0, \pi]$.

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est bijective et on note sa fonction réciproque

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\to [0, \pi] \\ x &\mapsto y \text{ tel que } \cos(y) = x. \end{aligned}$$



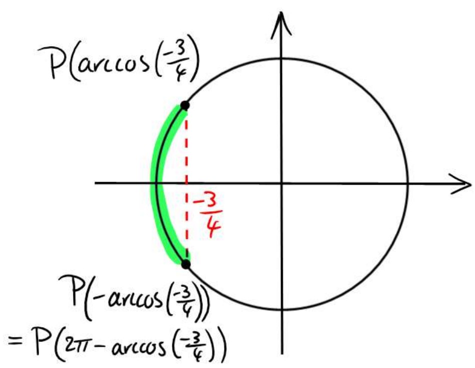


Propriétés de arccos

- $\cos(\arccos(x) = x \ \forall x \in [-1, 1]$
- $\arccos(\cos(x)) \neq x$ en général. On a $\arccos(\cos(x)) = x \iff x \in [0, \pi]$.
  Par exemple, $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$.
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
- La solution générale de l'équation $\cos(x) = a$, $a \in [-1, 1]$ est

$$x = \begin{cases} \arccos(a) + 2\pi k \\ \text{ou} \\ -\arccos(a) + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemple 3.2
Résoudre $\cos(x) \leq \frac{-3}{4}$ pour $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right]$.



Solution générale:

$$\arccos\left(\frac{-3}{4}\right) + 2\pi k \leq x \leq 2\pi - \arccos\left(\frac{-3}{4}\right) + 2\pi k$$

Les solutions appartenant à $\left[\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right]$ sont donc

$$\arccos\left(\frac{-3}{4}\right) - 2\pi \leq x \leq -\pi$$

Fonctions trigonométriques évaluées en $\arccos(x)$

- $\cos(\arccos(x)) = x$
- $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}$

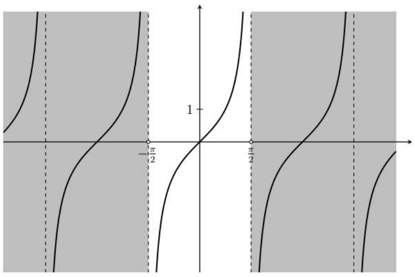
  On a choisi la racine positive car $\arccos(x) \in [0, \pi] \Longrightarrow \sin(\arccos(x)) \geq 0$.
- $\tan(\arccos(x) = \dfrac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$.

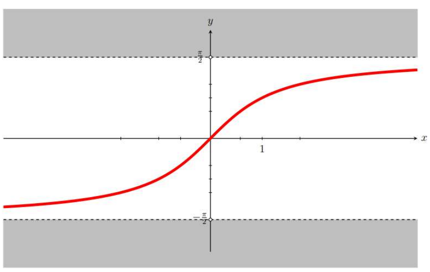
Fonction réciproque de la tangente

La *détermination principale* de tan est $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\tan : \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective et on note sa fonction réciproque

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\to \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto y \text{ tel que } \tan(y) = x. \end{aligned}$$





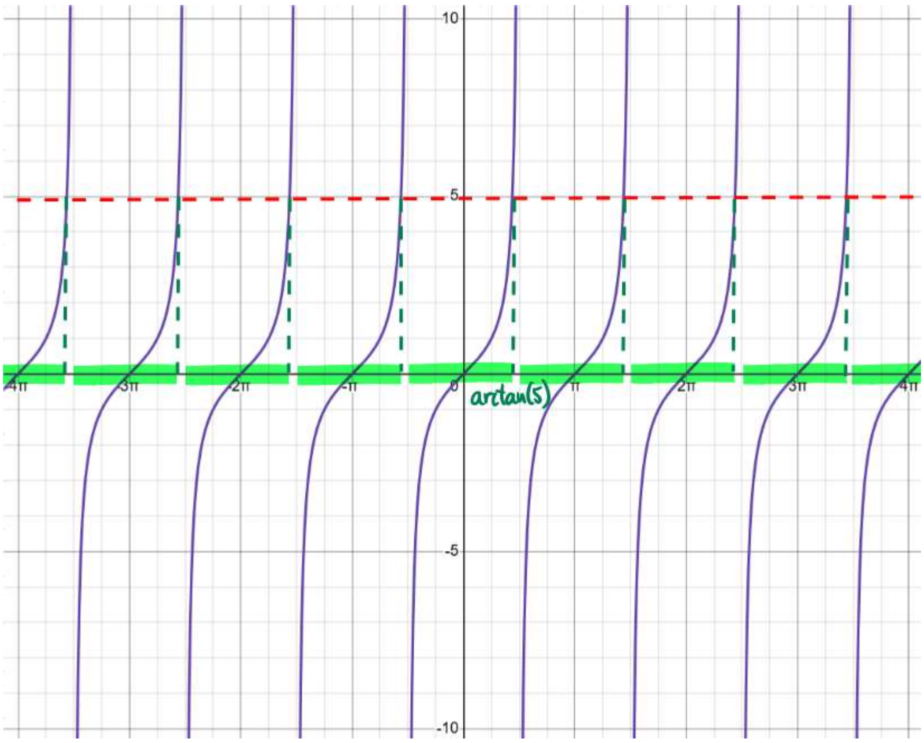
Propriétés de arctan

- $\tan(\arctan(x) = x \; \forall x \in \mathbb{R}$
- $\arctan(\tan(x)) \neq x$ en général. On a $\arctan(\tan(x)) = x \iff x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, c'est donc une fonction impaire.
- La solution générale de l'équation $\tan(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ est

$$x = \arctan(a) + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemple 3.3

Résoudre $\tan(x) \leq 5$ pour $x \in \mathbb{R}$.



La solution est donnée par

$$\frac{-\pi}{2} + \pi k < x \leq \arctan(5) + \pi k$$

Fonctions trigonométriques évaluées en $\arctan(x)$

- $\tan(\arctan(x)) = x$
- On a

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cos(\alpha) \\
&= \tan(\alpha)\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} \\
\implies \sin^2(\alpha) &= \tan^2(\alpha)(1 - \sin^2(\alpha)) \\
\implies (1 + \tan^2(\alpha)) \sin^2(\alpha) &= \tan^2(\alpha) \\
\implies \sin(\alpha) &= \frac{\pm \tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}
\end{aligned}$$

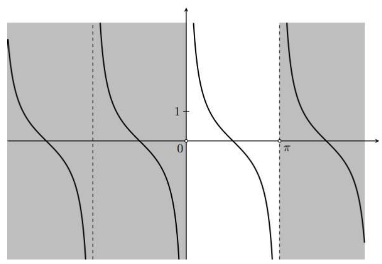
  On a donc $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{\tan(\arctan(x))}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan(x))}} = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.
  On a choisi la racine positive car tan et sin sont du même signe sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
- $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{\sin(\arctan(x))}{\tan(\arctan(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

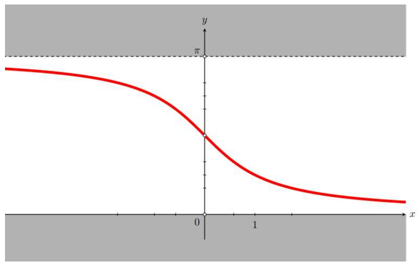
Fonction réciproque de la cotangente

La *détermination principale* de cot est $]0, \pi[$.

$\cot :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ est bijective et on note sa fonction réciproque

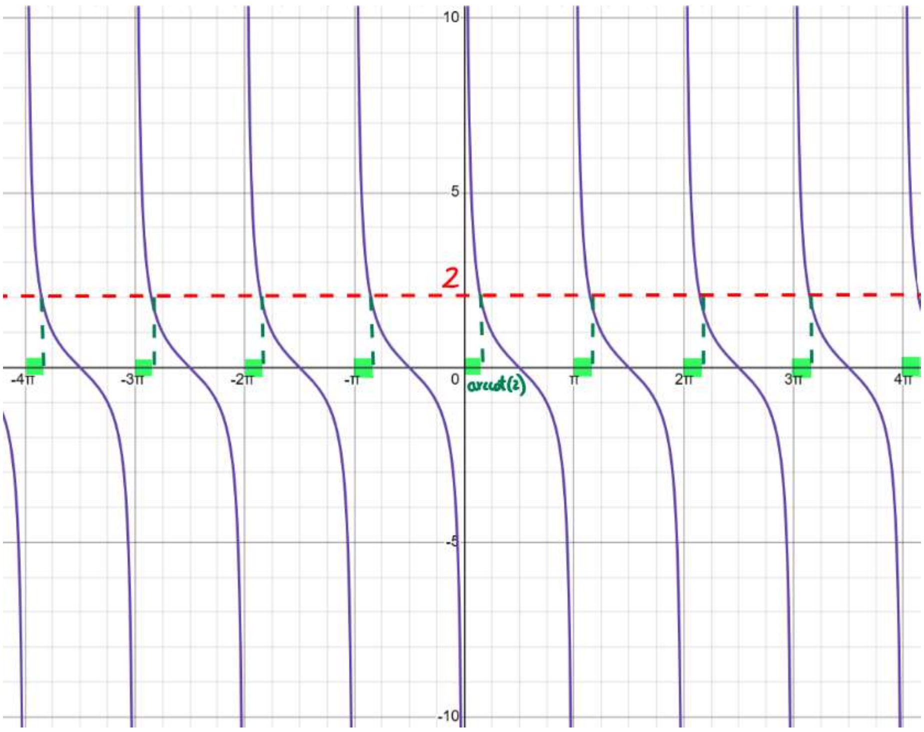
$$\begin{aligned}
\operatorname{arccot} : \mathbb{R} &\to]0, \pi[\\
x &\mapsto y \text{ tel que } \cot(y) = x.
\end{aligned}$$





Exemple 3.4

Résoudre $\cot(x) \geq 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.



Attention: cot est une fonction décroissante. La solution est donnée par

$$\pi k < x \leq \operatorname{arccot}(2) + \pi k.$$

Exemple 3.5

Calculer $\sin\left(2 \arccos\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$.

$$
\begin{aligned}
\sin^2\left(2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) &= 1-\cos^2\left(2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)\\
&= 1-\left[\cos^2\left(2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)-\sin^2\left(2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right]^2\\
&= 1-\left[2\cos^2\left(2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)-1\right]^2\\
&= 1-\left[2\left(\frac{1}{4}\right)^2-1\right]^2\\
&= \frac{15}{64}
\end{aligned}
$$

Comme $\arccos\left(\frac{1}{4}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $2\arccos\left(\frac{1}{4}\right) \in [0,\pi]$. Le sinus d'un tel angle est donc positif, et donc on prend la racine carrée positive:

$$
\sin\left(2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}.
$$

Remarque 3.6

Pour localiser un angle donné par une fonction trigonométrique réciproque, il faut comparer l'angle avec des angles remarquables et utiliser la croissance ou la décroissance de la fonction trigonométrique correspondante.

Par exemple, $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ est l'unique angle appartenant à $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut $\frac{2}{3}$. On a

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1\\
\Longleftrightarrow\ & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) < \frac{2}{3} < \cos(0)\\
\Longleftrightarrow\ & \arccos(\cos(0)) < \arccos\left(\frac{2}{3}\right) < \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
\Longleftrightarrow\ & 0 < \arccos\left(\frac{2}{3}\right) < \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

car le cosinus est une fonction strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

Exemple 3.7

Calculer $\arcsin\left(\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right)$.

Par définition, $\arcsin\left(\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right)$ est l'unique angle appartenant à la détermination principale du sinus $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dont le sinus vaut $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)$. Il faut exprimer cette valeur comme sinus d'angle dans la détermination principale du sinus.

Puisque $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{-13\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$, on a donc

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{10}.$$