Cours 7

2 Résolution des triangles

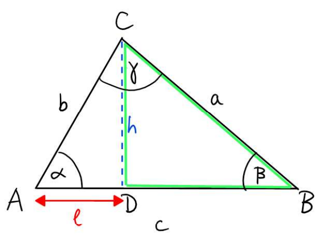
On va résoudre des problèmes géométriques dans les triangles, par exemple, trouver des angles ou des longueurs des côtés.

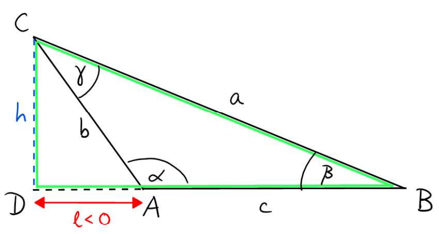
Rappel:

- La somme des angles dans un triangle est 180°. En particulier, tous les angles dans un triangle sont entre 0° et 180°.
- Un angle α dans un triangle est dit
  - *aigu* si $0 < \alpha < 90^\circ$,
  - *droit* si $\alpha = 90^\circ$,
  - *obtus* si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

On va prouver quelques résultats reliant les angles et les côtés dans un triangle.

Soit ABC un triangle quelconque (les images ci-dessous représentent les deux situations possibles, selon la présence ou non d'un angle obtus).





On a $\cos(\alpha) = \dfrac{\ell}{b}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{h}{b}$ et donc $\ell = b\cos(\alpha)$ et $h = b\sin(\alpha)$.

En considérant le triangle DBC, on a

$$\begin{aligned}
a^2 &= (c-\ell)^2 + h^2 \\
&= (c - b\cos(\alpha))^2 + (b\sin(\alpha))^2 \\
&= c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha) + b^2\sin^2(\alpha) \\
&= c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2\underbrace{(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha))}_{=1} \\
&= c^2 + b^2 - 2bc\cos(\alpha).
\end{aligned}$$

De manière analogue, on obtient des expressions pour b^2 et c^2. On a donc montré la généralisation suivante du théorème de Pythagore.

Théorème 2.1 (Théorème du cosinus)

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)
\end{aligned}$$

Dans les figures précédentes,

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{h}{b} \quad \Longrightarrow \quad h = b\sin(\alpha) \\
\sin(\beta) &= \frac{h}{a} \quad \Longrightarrow \quad h = a\sin(\beta)
\end{aligned}$$

On a donc $b\sin(\alpha) = a\sin(\beta) \Longrightarrow \dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{b}$.
On obtient $\dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\gamma)}{c}$. On a montré le résultat suivant.

Théorème 2.2 (Théorème du sinus)

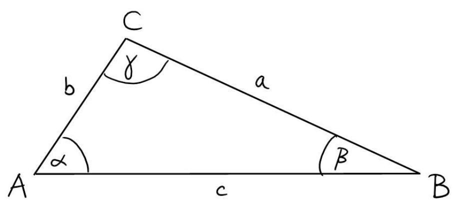
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

On remarque qu'on a aussi $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$.

Exemple 2.3

On construit un triangle ABC avec les côtés

$$a = 91, \quad b = 65, \quad c = 39.$$



Recherche de α:

On connaît trois côtés et aucun angle, on va donc utiliser le théorème du cosinus.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ \iff \cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{65^2 + 39^2 - 91^2}{2 \cdot 65 \cdot 39} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

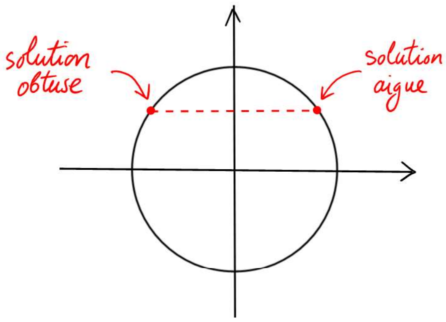
Comme $\cos(\alpha) < 0$, on a donc $\alpha \in]90°, 180°[$. Ceci implique que $\alpha = 120°$ (en particulier, $\alpha > 90°$, et donc α est obtus).

Recherche de β et γ:

On peut utiliser le théorème du cosinus ou le théorème du sinus.

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} \iff \sin(\beta) = \frac{b\sin(\alpha)}{a} = \frac{65\sin(120°)}{91} = \frac{65}{91} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.62$$

Il y a deux solutions de $\sin(\beta) = \frac{65}{91} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $]0°, 180°[$. Puisque α est obtus, β doit être aigu.



On a donc $\beta \approx 38.2°$, ce qui implique que $\gamma = 180° - 38.2° - 120° \approx 21.8°$.

Remarque 2.4

Voici des conseils généraux pour la résolution des triangles.

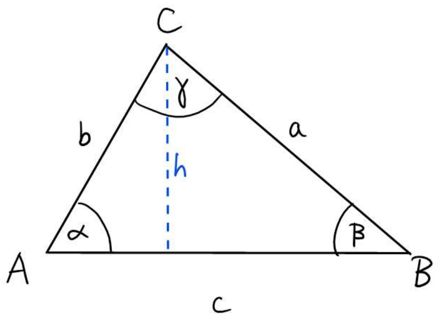
- Si on connaît les trois côtés:
  - déterminer le grand angle (celui en face du plus long côté) à l'aide du théorème du cosinus,
  - déterminer les autres angles à l'aide du théorème du sinus.
- Si on connaît deux côtés et l'angle entre eux:
  - déterminer le troisième côté avec le théorème du cosinus,
  - déterminer le petit angle avec le théorème du sinus,
  - utiliser $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ pour troisième angle.
- Si on connaît un côté et deux angles:
  - utiliser $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ pour trouver le troisième angle,
  - déterminer les côtés avec le théorème du sinus.
- Si on connaît deux côtés et un angle obtus pas entre eux:
  - déterminer un angle aigu manquant avec le théorème du sinus,
  - déterminer le troisième angle en utilisant $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,
  - déterminer le troisième côté à l'aide du théorème du sinus.
- Si on connaît deux côtés et un angle aigu pas entre eux:
  - le triangle défini pourrait ne pas être unique ! (Voir Série 7, Exercice 2.)

Une autre remarque utile est que $\sin(180° - \beta - \gamma) = \sin(\alpha) = \sin(\beta + \gamma)$.

Formule de Héron

On va voir une formule qui permet d'exprimer l'aire d'un triangle en fonctions des trois côtés.

Soit ABC un triangle.



Soit S l'aire de ABC. On a

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ch \\
&= \frac{1}{2}cb\sin(\alpha) \\
&= \frac{1}{2}cb\sqrt{1-\cos^2(\alpha)} \qquad (\text{car ici, } \sin(\alpha) > 0) \\
&= \frac{1}{2}cb\sqrt{(1-\cos(\alpha))(1+\cos(\alpha))}
\end{aligned}$$

Par le théorème du cosinus, $\cos(\alpha) = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, et donc

$$\begin{aligned}
(1-\cos(\alpha))(1+\cos(\alpha)) &= \left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\
&= \left(\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{2bc}\right)\left(\frac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{2bc}\right) \\
&= \frac{1}{(2bc)^2}\left(a^2-(b-c)^2\right)\left((b+c)^2-a^2\right) \\
&= \frac{1}{(2bc)^2}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)
\end{aligned}$$

Posons

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \text{ demi-périmètre de } ABC.$$

On a

$$\begin{aligned}
(1-\cos(\alpha))(1+\cos(\alpha)) &= \frac{1}{(2bc)^2}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)\\
&= \frac{1}{(2bc)^2}(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)2p\\
&= \frac{2^4}{(2bc)^2}(p-b)(p-c)(p-a)p\\
&= \left(\frac{2}{bc}\right)^2(p-b)(p-c)(p-a)p\\
\Longrightarrow S &= \frac{1}{2}cb\sqrt{\left(\frac{2}{bc}\right)^2(p-b)(p-c)(p-a)p}
\end{aligned}$$

On obtient la **formule de Héron**:

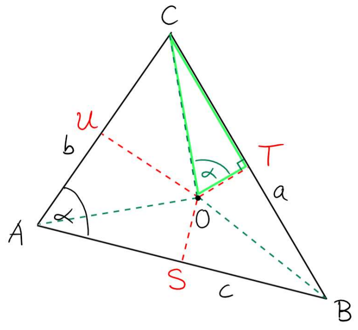
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

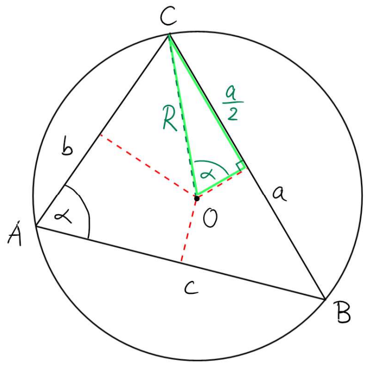
On note aussi que puisque $S = \frac{1}{2}cb\sin(\alpha)$,

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Cercle inscrit et circonscrit

Soit ABC un triangle. On considère les médiatrices des côtés. Soit O leur point d'intersection. Les triangles OTC et OBT sont similaires, OCU et OUA sont similaires, et OAS et OSB sont similaires.





Le *cercle circonscrit* de ABC est le cercle passant par les trois sommets A, B, C, centré en O. Ces propriétés définissent ce cercle de façon unique, c'est-à-dire, il y a un seul cercle qui satisfait ces propriétés. Soit R son rayon.

On a

$$\sin(\alpha) = \frac{a/2}{R} = \frac{a}{2R} \iff 2R = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

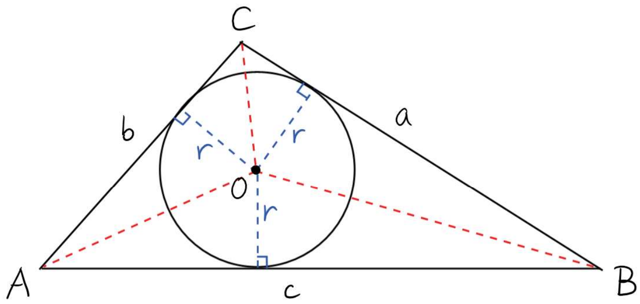
par le théorème du sinus. R est donc donné par

$$R = \frac{a}{2\sin(\alpha)} = \frac{b}{2\sin(\beta)} = \frac{c}{2\sin(\gamma)}$$

et on a

$$\frac{1}{2R} = \frac{2S}{abc} = \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Le *cercle inscrit* est le cercle tangent aux trois côtés. Son centre O est à l'intersection des trois bissectrices. Soit r son rayon.



Soit S l'aire du triangle ABC. On a

$$\begin{aligned} S &= \text{Aire}(OAB) + \text{Aire}(OBC) + \text{Aire}(OCA) \\ &= \frac{rc}{2} + \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} \\ &= r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \\ &= rp \end{aligned}$$

On a donc $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ et donc

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$