Cours 6

Équations générales

On commence par un exemple motivant.

Exemple 1.38

Résoudre $\sin^2(x) + 2\cos(x) - 2 = 0$.

L'idée est de réécrire l'équation en termes de cos et faire un changement de variable.

$$\begin{aligned}
&\sin^2(x) + 2\cos(x) - 2 = 0 \\
\iff &1 - \cos^2(x) + 2\cos(x) - 2 = 0 \\
\iff &\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0 \\
\iff &z^2 - 2z + 1 = 0 \quad \text{où } z = \cos(x) \\
\iff &(z-1)^2 = 0 \\
\iff &z = 1 \\
\iff &\cos(x) = 1 \\
\iff &x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

La fonction $\cos(x)$ est invariante si on remplace x par $-x$: $\cos(x) = \cos(-x)$.

La substitution $z = \cos(x)$ a bien marché parce que cette équation est aussi invariante si on remplace x par $-x$:

$$\begin{aligned}
&\sin^2(-x) + 2\cos(-x) - 2 = 0 \\
\iff &(-\sin(x))^2 + 2\cos(x) - 2 = 0 \\
\iff &\sin^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0
\end{aligned}$$

C'est-à-dire, x est une solution si et seulement si $-x$ est une solution.

Pour bien choisir le changement de variable, il faut tester l'invariance de l'équation.

On utilise les *Tests de Bioche*:

Soit $E(\sin(x), \cos(x)) = 0$ une équation.

- Si $E(\sin(-x), \cos(-x)) = E(\sin(x), \cos(x))$, on utilise la substitution
    - $\cos(x) = z$
    - $\sin(x) = \sqrt{1-z^2}$
- Si $E(\sin(\pi - x), \cos(\pi - x)) = E(\sin(x), \cos(x))$, on utilise la substitution
    - $\sin(x) = z$
    - $\cos(x) = \sqrt{1-z^2}$
- Si $E(\sin(\pi + x), \cos(\pi + x)) = E(\sin(x), \cos(x))$, on utilise la substitution
    - $\tan(x) = z$
    - $\sin(x) = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$
    - $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

  Attention: cette substitution n'est valable que sur $D_{\tan}$.
- Sinon, on utilise la substitution
    - $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = z$
    - $\sin(x) = \dfrac{2z}{1+z^2}$
    - $\cos(x) = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$

  Attention: cette substitution n'est valable que sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Rappel:

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

Remarque 1.39

En faisant un changement de variable, on a aussi exprimé les autres fonctions trigonométriques en fonction de la nouvelle variable.

Par exemple, si on pose $z = \sin(x)$, on a

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - z^2} \\ \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \end{aligned}$$

Les expressions pour la substitution $z = \cos(x)$ peuvent être déduites de manière similaire.

Si on pose $z = \tan(x)$, on a

$$\begin{aligned} & \tan^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1 - \sin^2(x)} \\ \iff & \tan^2(x)(1 - \sin^2(x)) = \sin^2(x) \\ \iff & \tan^2(x) = (1 + \tan^2(x)) \sin^2(x) \\ \iff & \sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)} \\ \iff & \sin(x) = \frac{\pm \tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \\ \iff & \sin(x) = \frac{\pm z}{\sqrt{1 + z^2}} \end{aligned}$$

On déduit $\cos(x)$ en termes de z d'une manière similaire.

Exercice facultatif: déduire $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de z pour la substitution $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

On choisit à chaque fois la racine carrée positive, par exemple, on prend $\cos(x) = \sqrt{1 - z^2}$ et non pas $-\sqrt{1 - z^2}$, car on récupère ces solutions perdues en résolvant $z = \sin(x)$ à la fin.

Exemple 1.40

Résoudre $3\tan^2(x) + 5 = \dfrac{7}{\cos(x)}$.

On réécrit d'abord l'équation de la manière suivante pour faciliter les tests de Bioche:

$$3\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - \frac{7}{\cos(x)} + 5 = 0.$$

On a donc $E(\sin(x), \cos(x)) = 3\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - \dfrac{7}{\cos(x)} + 5$.

$D_{def} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Tests de Bioche:

$$\begin{aligned}
E(\sin(-x), \cos(-x)) &= 3\frac{\sin^2(-x)}{\cos^2(-x)} - \frac{7}{\cos(-x)} + 5 \\
&= \frac{(-\sin(x))^2}{\cos^2(x)} - \frac{7}{\cos(x)} + 5 \\
&= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - \frac{7}{\cos(x)} + 5 \\
&= E(\sin(x), \cos(x))
\end{aligned}$$

On peut donc poser $z = \cos(x)$ et $\sin(x) = \sqrt{1 - z^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
& 3\frac{1 - z^2}{z^2} - \frac{7}{z} + 5 = 0 \\
\iff & 3(1 - z^2) - 7z + 5z^2 = 0 \\
\iff & 2z^2 - 7z + 3 = 0 \\
\iff & (2z - 1)(z - 3) = 0 \\
\iff & z = \frac{1}{2} \text{ ou } z = 3 \\
\iff & \cos(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) = 3.
\end{aligned}$$

On a pu multiplier par z car $z \neq 0$ sur D_{def}.

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \iff x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \dfrac{-\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\cos(x) = 3$ n'a pas de solution.

L'ensemble solution est donc

$$S = D_{def} \cap \left\{ \frac{\pm\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{\pm\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exemple 1.41

Résoudre $\sin(x) + \cos^2(x) = 1$.

On réécrit l'équation, $E(\sin(x), \cos(x)) = \sin(x) + \cos^2(x) - 1 = 0$.

$D_{def} = \mathbb{R}$.

Tests de Bioche:

Le premier test n'aboutit pas:

$$\begin{aligned} E(\sin(-x), \cos(-x)) &= \sin(-x) + \cos^2(-x) - 1 \\ &= -\sin(x) + \cos^2(x) - 1 \\ &\neq E(\sin(x), \cos(x)) \end{aligned}$$

Mais le deuxième fonctionne:

$$\begin{aligned} E(\sin(\pi - x), \cos(\pi - x)) &= \sin(\pi - x) + \cos^2(\pi - x) - 1 \\ &= \sin(x) + (-\cos(x))^2 - 1 \\ &= \sin(x) + \cos^2(x) - 1 \\ &= E(\sin(x), \cos(x)) \end{aligned}$$

On pose donc $z = \sin(x)$, $\cos(x) = \sqrt{1-z^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
&z + 1 - z^2 - 1 = 0\\
\iff\ & z - z^2 = 0\\
\iff\ & z(1-z) = 0\\
\iff\ & z = 0 \text{ ou } z = 1\\
\iff\ & \sin(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = 1.
\end{aligned}$$

$\sin(x) = 0 \iff x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$\sin(x) = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

L'ensemble solution est donc

$$S = \left\{\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exemple 1.42

Résoudre $\cot(x) + 2\sin^2(x) - 2 = 0$.

On réécrit l'équation, $E(\sin(x), \cos(x)) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + 2\sin^2(x) - 2 = 0$.

$D_{def} = \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Tests de Bioche:

Les premiers deux tests n'aboutissent pas, mais le troisième fonctionne:

$$\begin{aligned}
E(\sin(\pi+x), \cos(\pi+x)) &= \frac{\cos(\pi+x)}{\sin(\pi+x)} + 2\sin^2(\pi+x) - 2\\
&= \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} + 2(-\sin(x))^2 - 2\\
&= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + 2\sin^2(x) - 2\\
&= E(\sin(x), \cos(x))
\end{aligned}$$

On pose donc $z = \tan(x)$, $\sin(x) = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$, $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Attention: ce changement de variable n'est valable que pour $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $x \in D_{\tan}$. Il va falloir tester ces valeurs séparément dans l'équation originale.

Sur $D_{def} \cap D_{\tan}$, on a $1 + z^2 \neq 0$ et $z \neq 0$, et on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{z} + 2\frac{z^2}{1+z^2} - 2 = 0 \\
\iff & 1 + z^2 + 2z^3 - 2z(1+z^2) = 0 \\
\iff & 1 + z^2 + 2z^3 - 2z - 2z^3 = 0 \\
\iff & z^2 - 2z + 1 = 0 \\
\iff & (z-1)^2 = 0 \\
\iff & z = 1 \\
\iff & \tan(x) = 1.
\end{aligned}$$

$\tan(x) = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

On vérifie aussi les valeurs $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ auxquelles cette méthode ne s'applique pas, en les substituant dans l'équation originale.

$\cot\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - 2 = 0 + 2 - 2 = 0.$

L'ensemble solution est donc

$$S = D_{def} \cap \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exemple 1.43

Résoudre $15\tan(x) + 9\sin(x) + 32\cos(x) + 32 = 0$.

On réécrit l'équation, $E(\sin(x), \cos(x)) = 15\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 9\sin(x) + 32\cos(x) + 32 = 0$.

$D_{def} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Tests de Bioche

Les premiers trois tests n'aboutissent pas. On est donc obligé d'utiliser la substitution $z = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\sin(x) = \dfrac{2z}{1+z^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$.

Attention: ce changement de variable n'est valable que pour $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Il va falloir tester ces valeurs séparément dans l'équation originale.

Sur $D_{def} \cap (\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\})$, on a $1 + z^2 \neq 0$ et $1 - z^2 \neq 0$, et on obtient

$$
\begin{aligned}
& 15\frac{2z}{1-z^2} + 9\frac{2z}{1+z^2} + 32\frac{1-z^2}{1+z^2} + 32 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 30z(1+z^2) + 18z(1-z^2) + 32(1-z^2)^2 + 32(1-z^2)(1+z^2) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 30z + 30z^3 + 18z - 18z^3 + 32(1 - 2z^2 + z^4) + 32(1 - z^4) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 12z^3 - 64z^2 + 48z + 64 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 3z^3 - 16z^2 + 12z + 16 = 0.
\end{aligned}
$$

Pour résoudre cette équation

- on cherche une racine "évidente" (ici, $z = 2$), et
- on divise ou on factorise le polynôme par le facteur trouvé (ici, $z - 2$).

Ici, on constate que $3 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 16 = 0$, c'est-à-dire 2 est une racine, et donc $z - 2$ est un facteur du polynôme. On effectue la division polynomiale:

$$
\begin{array}{r|l}
3z^3 - 16z^2 + 12z + 16 & z - 2 \\
\hline
- \quad 3z^3 - 6z^2 + 0z + 0 & 3z^2 - 10z - 8 \\
-10z^2 + 12z + 16 & \\
- \quad -10z^2 + 20z + 0 & \\
-8z + 16 & \\
- \quad -8z + 16 & \\
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 3z^2 - 10z - 8 \\
\cline{2-2}
z - 2 & \big) \; 3z^3 - 16z^2 + 12z + 16 \\
 & - \quad 3z^3 - 6z^2 \qquad\qquad \\
 & -10z^2 + 12z + 16 \\
 & - \quad -10z^2 + 20z \quad\; \\
 & -8z + 16 \\
 & - \quad -8z + 16 \\
 & 0
\end{array}
$$

(Voici deux façons équivalentes d'écrire ce calcul.)

On a donc

$$
\begin{aligned}
& 3z^3 - 16z^2 + 12z + 16 = 0 \\
\iff & (z-2)(3z^2 - 10z - 8) = 0 \\
\iff & (z-2)(3z+2)(z-4) = 0 \\
\iff & z = 2 \text{ ou } z = \frac{-2}{3} \text{ ou } 4 \\
\iff & \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \text{ ou } \frac{-2}{3} \text{ ou } 4
\end{aligned}
$$

Ceci ne sont pas des valeurs remarquables, on doit donc introduire les solutions particulières $\alpha, \beta, \gamma \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= 2 \\
\tan(\beta) &= \frac{-2}{3} \\
\tan(\gamma) &= 4
\end{aligned}
$$

Ainsi, on obtient les solutions

$$\{2\alpha + 2\pi k, 2\beta + 2\pi k, 2\gamma + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

On vérifie aussi les valeurs $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ auxquelles cette méthode ne s'applique pas, en les substituant dans l'équation originale.

$15\tan(\pi + 2\pi k) + 9\sin(\pi + 2\pi k) + 32\cos(\pi + 2\pi k) + 32 = 0 + 0 - 32 + 32 = 0.$

L'ensemble solution est donc

$$
\begin{aligned}
S &= D_{def} \cap \{2\alpha + 2\pi k, 2\beta + 2\pi k, 2\gamma + 2\pi k, \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{2\alpha + 2\pi k, 2\beta + 2\pi k, 2\gamma + 2\pi k, \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}
$$

Remarque 1.44

Cette méthode peut aussi être utilisée pour les inéquations.