Cours 5

1.5 Résolution d'équations trigonométriques

Équations trigonométriques linéaires

On va étudier les équations du type

$$a\cos(x) + b\sin(x) = c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}, a, b \neq 0).$$

Idée: transformer l'expression à gauche en un sinus ou un cosinus, pour se ramener à une équation élémentaire.

On note que

$$\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x) = \cos(\varphi - x).$$

Mais il n'est pas toujours possible de trouver φ tel que $a = \cos(\varphi)$ et $b = \sin(\varphi)$. On *normalise* l'équation d'abord, en divisant par $\sqrt{a^2 + b^2}$ pour obtenir

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Le point

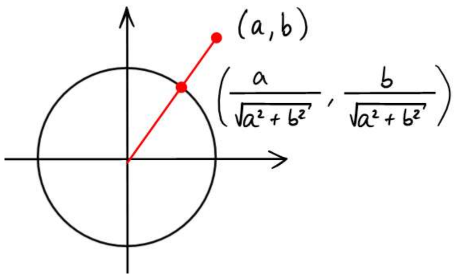
$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

est un point sur le cercle unitaire car

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1.$$

Il est donc possible de trouver un angle φ tel que

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



On a

$$\begin{aligned}
&a\cos(x) + b\sin(x) = c \\
\iff &\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\iff &\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\iff &\cos(\varphi - x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

On peut maintenant résoudre cette équation.

- Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1]$, il n'y a pas de solutions, $S = \emptyset$.
- Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$, on peut trouver une solution particulière α telle que $\cos(\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. La solution générale est donc

$$\begin{aligned}
\varphi - x &= \begin{cases} \alpha + 2\pi k \\ \text{ou} \\ -\alpha + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\iff x &= \begin{cases} \varphi - \alpha + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \varphi + \alpha + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser sin de la même manière pour résoudre une telle équation linéaire.

$$
\begin{aligned}
& a\cos(x) + b\sin(x) = c \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\Longleftrightarrow\ & \sin(\varphi)\cos(x) + \cos(\varphi)\sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\Longleftrightarrow\ & \sin(\varphi + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}
$$

où φ est un angle tel que

$$\sin(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{et} \qquad \cos(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On résout cette équation.

- Si $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1]$, il n'y a pas de solutions, $S = \emptyset$.
- Si $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$, on peut trouver une solution particulière α telle que $\sin(\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. La solution générale est donc

$$
\begin{aligned}
& \varphi + x = \begin{cases} \alpha + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \pi - \alpha + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\
\Longleftrightarrow\ & x = \begin{cases} \alpha - \varphi + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \pi - \alpha - \varphi + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

Attention: lorsqu'on choisit φ et la formule trigonométrique qu'on veut utiliser, il faut faire attention aux signes dans l'expression.

Exemple 1.32

Résoudre $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$.

$a = \sqrt{3}$, $b = -1$, $c = \sqrt{2}$.

On va normaliser l'équation en divisant par $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

$\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \in [-1,1]$,

On a

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} \\ \iff &\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos(\varphi)} \cos(x) \ \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\sin(\varphi)} \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On cherche donc un angle φ tel que $\cos(\varphi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{-1}{2}$.
On peut prendre $\varphi = \dfrac{-\pi}{6}$. L'équation devient

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \iff &\cos\left(\frac{-\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Solution particulière: $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.
Solution générale:

$$\begin{aligned} &\frac{-\pi}{6} - x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \dfrac{-\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \iff &x = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k = \dfrac{-5\pi}{12} + 2\pi k \\ \text{ou} \\ -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k = \dfrac{\pi}{12} + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

On a donc

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{12} + 2\pi k, \frac{\pi}{12} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Remarque: on aurait pu aussi utiliser la formule

$$\cos(\varphi)\cos(x) - \sin(\varphi)\sin(x) = \cos(\varphi + x)$$

en cherchant un angle φ tel que $\cos(\varphi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{1}{2}$. Ceci aurait bien sûr donné les mêmes solutions.

Exemple 1.33

Résoudre $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{3}$.

$a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

$\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \notin [-1,1]$.

On a donc pas de solution, $S = \emptyset$.

Exemple 1.34

Résoudre $2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sqrt{12}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2$.

$a = 2$, $b = \sqrt{12}$, $c = 2$, $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+\sqrt{12}^2} = 4$.

$\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \in [-1,1]$.

On normalise:

$$\begin{aligned}
& 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{12}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \\
\iff & \frac{2}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sqrt{12}}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{4} \\
\iff & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On va chercher un angle φ tel que $\sin(\varphi) = \dfrac{1}{2}$ et $\cos(\varphi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
On peut prendre $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. L'équation devient

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \\
\iff & \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Solution particulière: $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Solution générale:

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2} &= \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\
\iff \quad \frac{x}{2} &= \begin{cases} 2\pi k \\ \text{ou} \\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\
\iff \quad x &= \begin{cases} 4\pi k \\ \text{ou} \\ \dfrac{4\pi}{3} + 4\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

On a donc

$$S = \left\{ 4\pi k, \frac{4\pi}{3} + 4\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exemple 1.35

Résoudre $\sin(2x) + \cos(2x) > 1$.

On commence de la même manière que dans le cas d'une équation.

$a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

On normalisant, on obtient:

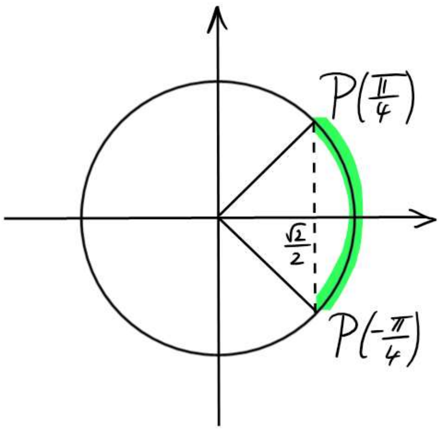
$$
\begin{aligned}
& \sin(2x) + \cos(2x) > 1 \\
\iff & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2x) > \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

On va chercher un angle φ tel que $\cos(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Rappel: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On peut prendre $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. L'inéquation devient

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) > \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\iff & \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\iff & \frac{-\pi}{4} + 2\pi k < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\
\iff & 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\
\iff & \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k
\end{aligned}$$



Exemple 1.36

Pour résoudre l'inéquation $\sin(x)[\cos(x) + 3\sin(x) - 2] < 0$, il faut trouver

- S_i, l'ensemble solution de $\sin(x) < 0$,
- S_{ii}, l'ensemble solution de $\cos(x) + 3\sin(x) - 2 > 0$,
- S_{iii}, l'ensemble solution de $\sin(x) > 0$,
- S_{iv}, l'ensemble solution de $\cos(x) + 3\sin(x) - 2 < 0$.

L'ensemble solution S de $\sin(x)[\cos(x) + 3\sin(x) - 2] < 0$ est alors donné par

$$S = (S_i \cap S_{ii}) \cup (S_{iii} \cap S_{iv}).$$

Remarque 1.37

Pour trouver les maxima et minima d'une fonction de la forme

$$a\cos(x) + b\sin(x),$$

on peut la réécrire de la manière suivante:

$$\begin{aligned} a\cos(x) + b\sin(x) &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(\varphi - x) \end{aligned}$$

où φ est un angle tel que $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Les maxima et minima sont plus faciles à trouver quand la fonction est écrite sous cette forme.

Par exemple, un maximum de la fonction se trouve en x si $\cos(\varphi - x) = 1$.