Cours 4

1.4 Formules trigonométriques, transformations

Formules d'addition

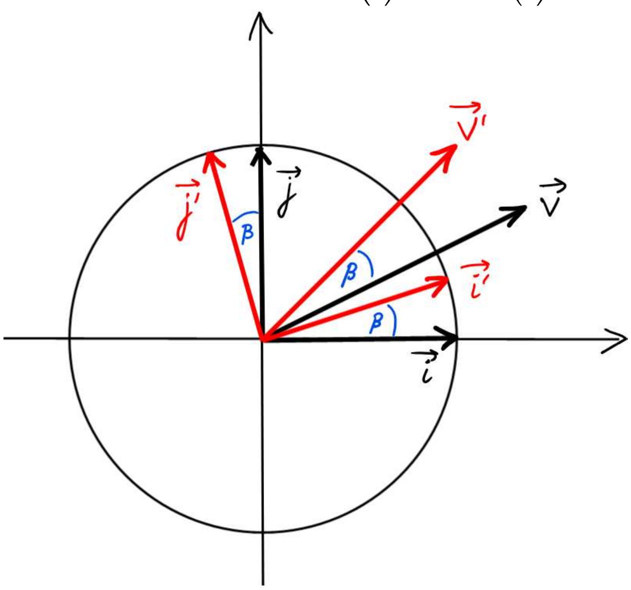
Proposition 1.23

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. En tournant $\vec{v}$ d'un angle β dans le sens positif autour de l'origine, on obtient le vecteur

$$\begin{pmatrix} x\cos(\beta) - y\sin(\beta) \\ x\sin(\beta) + y\cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Preuve. Le vecteur $\vec{v}$ peut être exprimé comme

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \text{où} \quad \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Si on tourne les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ d'un angle β pour obtenir $\vec{v'}$, $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$, la même relation $\vec{v'} = x\vec{i'} + y\vec{j'}$ est vraie pour ces vecteurs.

On peut trouver les coordonnées de $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$: ils se trouvent sur le cercle unitaire, $\vec{i'}$ faisant un angle de β avec l'axe Ox et $\vec{j'}$ faisant un angle β avec l'axe Oy (c'est-à-dire un angle $\beta + \frac{\pi}{2}$ avec l'axe Ox). On a donc

$$\begin{aligned}
\vec{i'} &= \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \\
\vec{j'} &= \begin{pmatrix} \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\vec{v'} = x\vec{i'} + y\vec{j'} = x \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\beta) - y\sin(\beta) \\ x\sin(\beta) + y\cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

□

Théorème 1.24

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}$$

Preuve. On applique la proposition précédente au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$.

En tournant $\vec{v}$ d'un angle β, on a $\vec{v'} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$. Mais par la proposition précédente, on a aussi

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

En comparant les coordonnées, on obtient

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

Les autres formules se déduisent à partir de celles-ci en remplaçant β par $-\beta$. $\square$

On peut aussi déduire les formules suivantes pour tan et cot.

Corollaire 1.25

Si $\alpha, \beta, \alpha \pm \beta \in D_{\tan}$,

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Si $\alpha, \beta, \alpha \pm \beta \in D_{\cot}$,

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{-1 \pm \cot(\alpha)\cot(\beta)}{\cot(\alpha) \pm \cot(\beta)}$$

Remarquons que

$$\alpha \pm \beta \in D_{\tan} \iff 1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta) \neq 0,$$
$$\alpha \pm \beta \in D_{\cot} \iff \cot(\alpha) \pm \cot(\beta) \neq 0.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta)}\\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}\\ &= \frac{[\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)]\,/\cos(\alpha)\cos(\beta)}{[\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)]\,/\cos(\alpha)\cos(\beta)}\\ &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}.\end{aligned}$$

On peut montrer les autres identités d'une manière similaire. □

Formules d'angles doubles

On applique les formules ci-dessus au cas particulier des angles doubles, en posant $\alpha = \beta$.

Corollaire 1.26

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha)-1 = 1-2\sin^2(\alpha).\end{aligned}$$

Si $\alpha,\ 2\alpha \in D_{\tan}$,

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

Si $\alpha,\ 2\alpha \in D_{\cot}$,

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

Remarquons qu'on peut aussi déduire que $\sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, etc.

Formules de bissection

On peut exprimer les fonctions trigonométriques de $\frac{\alpha}{2}$ en fonction de α.

On a

$$\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2(\beta) = 2\cos^2(\beta) - 1.$$

En posant $\alpha = 2\beta$, on a

$$\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1.$$

On déduit les formules suivantes.

Corollaire 1.27

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}.$$

Pour α tel que $\frac{\alpha}{2} \in D_{\tan}$,

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

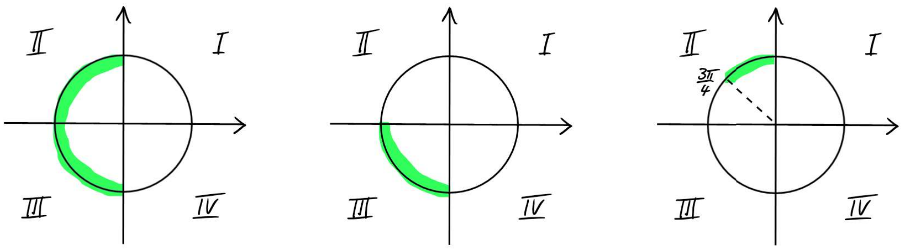
Pour α tel que $\frac{\alpha}{2} \in D_{\cot}$,

$$\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}.$$

Exemple 1.28

Calculer $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ où α est défini par $\sin(\alpha) = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ et $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

- Localisation de $P(\alpha)$:
  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \implies P(\alpha) \in II \cup III.$



$P(\alpha) \in II \cup III$ $\qquad$ $\sin(\alpha) < 0 \Rightarrow P(\alpha) \in III$ $\qquad$ $P\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

- Calcul de $\cos(\alpha)$:

  $P(\alpha) \in II \cup III \Longrightarrow \cos(\alpha) < 0$, et donc comme $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$, on a

$$\cos(\alpha) = -\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{-1}{3}.$$

- Localisation de $P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \Longrightarrow P\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in I \cup II$. Cette localisation n'est pas assez précise pour déterminer le signe du sinus. Mais on sait en plus que $\sin(\alpha) < 0$. On peut donc déduire que $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, ce qui implique que $\frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$. On a donc $P\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in II$.

  $\Longrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$.

  $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$ et $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$

- Calcul de $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

  $\Longrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{-1}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

  $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$ et $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$

  $\Longrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{-1}{3}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

Transformations somme-produit

On aimerait exprimer $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$ comme produit. On a

$$\begin{aligned}
\sin(\gamma + \delta) &= \sin(\gamma)\cos(\delta) + \cos(\gamma)\sin(\delta) \\
\sin(\gamma - \delta) &= \sin(\gamma)\cos(\delta) - \cos(\gamma)\sin(\delta)
\end{aligned}$$

En additionnant les deux équations ci-dessus, on obtient

$$\sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta) = 2\sin(\gamma)\cos(\delta),$$

et en soustrayant, on obtient

$$\sin(\gamma + \delta) - \sin(\gamma - \delta) = 2\cos(\gamma)\sin(\delta).$$

En posant $\alpha = \gamma + \delta$ et $\beta = \gamma - \delta$, on a

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

et on a donc montré les identités suivantes:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\
\sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

De manière analogue, à partir des identités

$$\begin{aligned}
\cos(\gamma + \delta) &= \cos(\gamma)\cos(\delta) - \sin(\gamma)\sin(\delta) \\
\cos(\gamma - \delta) &= \cos(\gamma)\cos(\delta) + \sin(\gamma)\sin(\delta)
\end{aligned}$$

on peut déduire

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos(\alpha) - \cos(\beta) &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exemple 1.29

Résoudre $\cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

On a

$$\begin{aligned}
& \cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
\iff & 2\cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{3} - x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x - \frac{\pi}{3}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
\iff & 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
\iff & 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\iff & 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1\\
\iff & \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\\
\iff & \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})\\
\iff & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Exemple 1.30

Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ et donc

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\
&= 2 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6}$.
Il y a donc plusieurs façons d'effectuer le calcul ci-dessus.

Exemple 1.31

Factoriser et résoudre $\cos(2x) - \cos(x) + 1 = 0$.

On a $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \sin^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$.

L'équation devient

$$\begin{aligned}
& \cos(2x) - \cos(x) + 1 = 0 \\
\iff & 2\cos^2(x) - 1 - \cos(x) + 1 = 0 \\
\iff & 2\cos^2(x) - \cos(x) = 0 \\
\iff & \cos(x)(2\cos(x) - 1) = 0 \\
\iff & \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \text{ou} \\ 2\cos(x) - 1 = 0 \iff \cos(x) = \frac{1}{2} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ ou } x = \frac{-\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$