Cours 3

Symétries

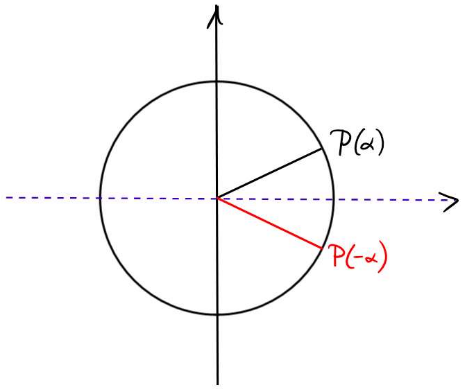
Définition 1.17

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *paire* si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, et *impaire* si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

La fonction cos est une fonction paire car $\cos(-x) = \cos(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

La fonction sin est une fonction impaire car $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

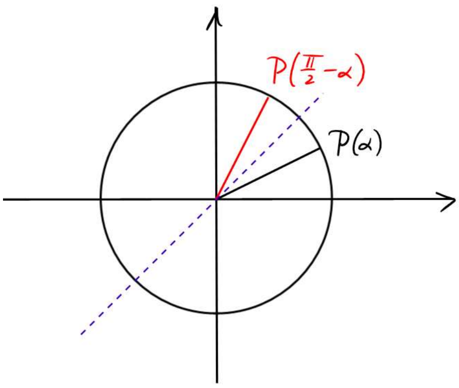
La symétrie par rapport à l'axe Ox (des angles *opposés*) permet de voir ces relations:



$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

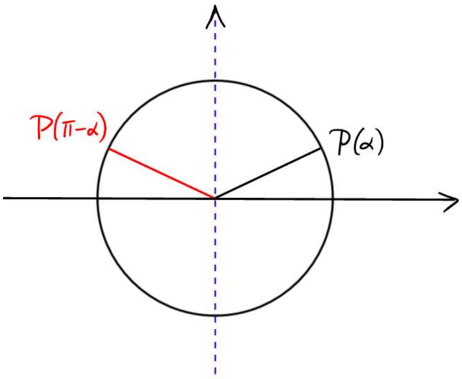
On peut aussi considérer les symétries suivantes et leurs conséquences.

La symétrie par rapport à la droite $y = x$ (des angles *complémentaires*):



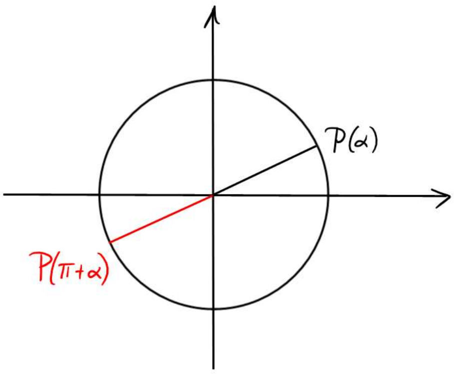
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$$

La symétrie par rapport à l'axe Oy (des angles *supplémentaires*):



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$$

La symétrie centrale (des angles *diamétralement opposés*):



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$$

On peut aussi voir ces symétries sur les graphes des fonctions.

Exemples 1.18

- Trouver $\cos(3\pi + x)$ en termes de $\sin(x)$ et $\cos(x)$:

$$\begin{aligned}\cos(3\pi + x) &= \cos(2\pi + \pi + x)\\ &= \cos(\pi + x)\\ &= -\cos(x).\end{aligned}$$

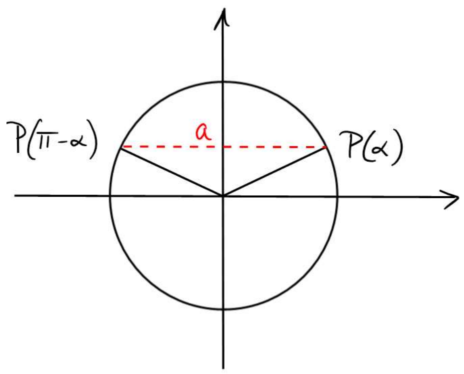
- Trouver $\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)$ en termes de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right) &= \sin\left(x+\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(x+4\pi-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &= -\cos(x).\end{aligned}$$

1.3 Équations trigonométriques élémentaires

$\sin(x) = a$

- Domaine de définition: $D_{def} = \mathbb{R}$.
- Il y a des solutions $\iff a \in [-1, 1]$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une solution particulière quelconque, $\sin(\alpha) = a$.



On a la solution générale

$$\sin(x) = a \iff \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

L'ensemble de toutes les solutions est donc

$$S = \{\alpha + 2\pi k, \pi - \alpha + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemples 1.19

- Résoudre $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

  $\frac{1}{2} \in [-1, 1]$ donc il peut y avoir des solutions.

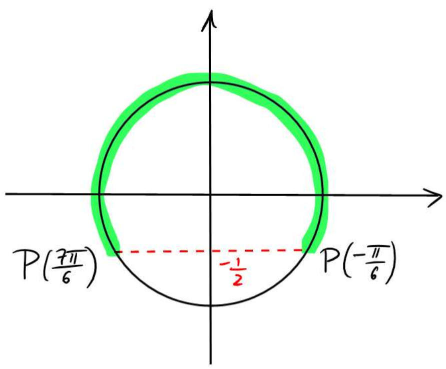
  Solution particulière: $\frac{\pi}{6}$ car $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \text{ou} \\ x = \underbrace{\pi - \frac{\pi}{6}}_{=\frac{5\pi}{6}} + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

  Solution générale:

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

- Résoudre $\sin(x) > \frac{-1}{2}$.



On a $\sin(x) > \frac{-1}{2} \iff \frac{-\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

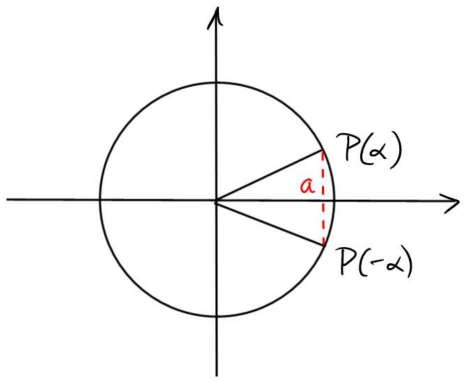
Solution générale:

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{-\pi}{6} + 2\pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \right[,$$

c'est-à-dire la réunion de tous les ensembles de la forme $\left] \frac{-\pi}{6} + 2\pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \right[$ où k est dans $\mathbb{Z}$.

$\cos(x) = a$

- Domaine de définition: $D_{def} = \mathbb{R}$.
- Il y a des solutions $\iff a \in [-1, 1]$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une solution particulière, $\cos(\alpha) = a$.



On a la solution générale

$$\cos(x) = a \iff \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

L'ensemble de toutes les solutions est donc

$$S = \{\alpha + 2\pi k, -\alpha + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemples 1.20

- Résoudre $\cos(x) = \sqrt{2}$.

  Il n'y a pas de solution car $\sqrt{2} \notin [-1, 1]$. $S = \emptyset$.

- Résoudre $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

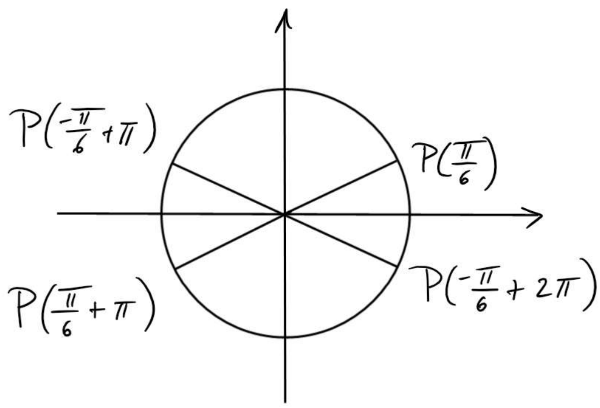
  $\dfrac{1}{2} \in [-1, 1]$ donc il peut y avoir une solution.

  Solution particulière: $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

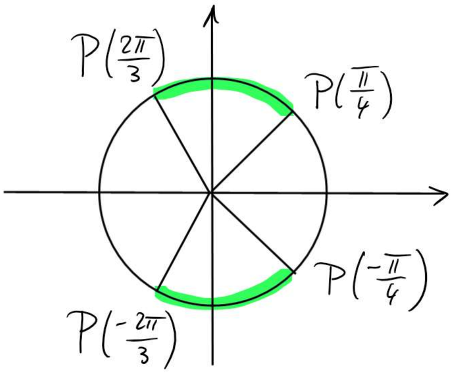
$$\cos(2x) = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \text{ou} \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

  Pour $x \in [0, 2\pi]$, les solutions sont donc

$$S = [0, 2\pi] \cap \left\{ \frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{-\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$



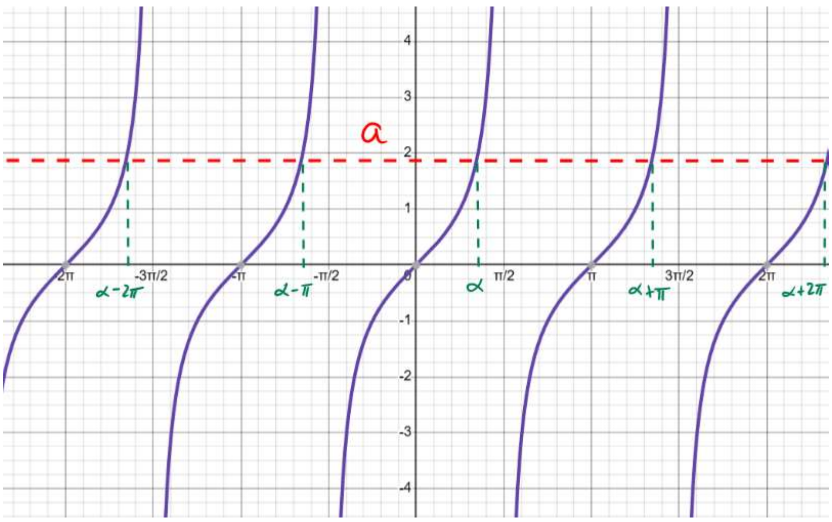
- Résoudre $\dfrac{-1}{2} < \cos(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.



On voit que $S = \left]\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right[$.

$\tan(x) = a$

- Domaine de définition: $D_{def} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Il y a des solutions $\forall a \in \mathbb{R}$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une solution particulière, $\tan(\alpha) = a$.



On a la solution générale

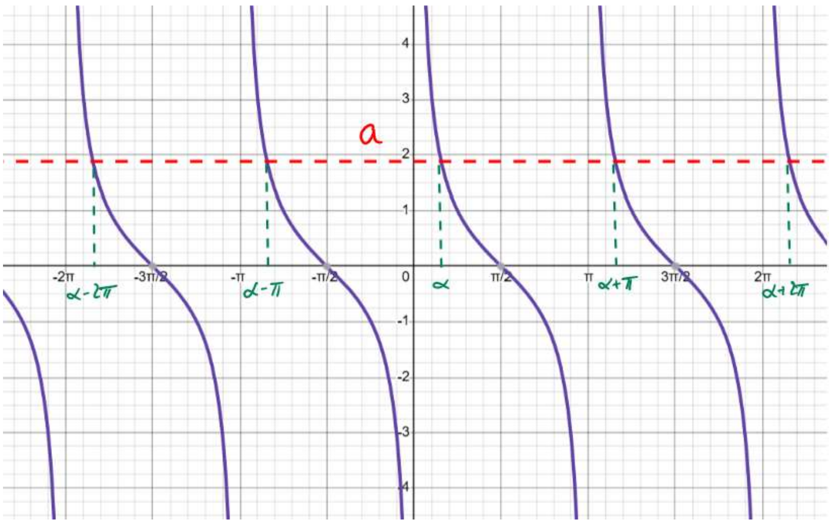
$$\tan(x) = a \iff x = \alpha + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

L'ensemble de toutes les solutions est donc

$$S = \{\alpha + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\cot(x) = a$

- Domaine de définition: $D_{def} = \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Il y a des solutions $\forall\ a \in \mathbb{R}$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une solution particulière, $\cot(\alpha) = a$.



On a la solution générale

$$\cot(x) = a \iff x = \alpha + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

L'ensemble de toutes les solutions est donc

$$S = \{\alpha + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

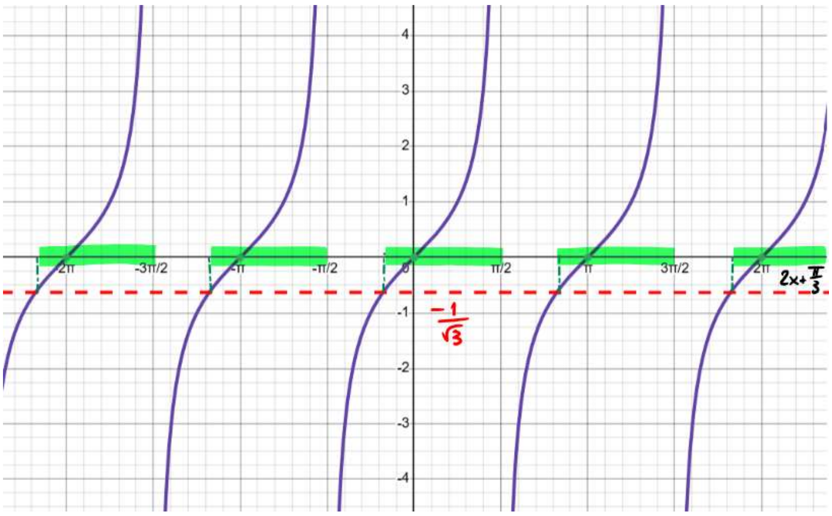
Exemples 1.21

- Résoudre $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{-\sqrt{3}}{3}$.

$$
\begin{aligned}
x \in D_{def} &\iff 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
&\iff 2x \neq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
&\iff 2x \neq \frac{\pi}{6} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
&\iff x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

et donc $D_{def} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Il nous faut donc x tel que $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{-\sqrt{3}}{3}$ et $x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.



Les solutions sont donc données par

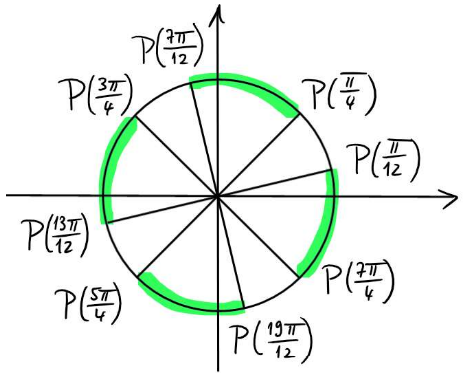
$$
\begin{aligned}
\frac{-\pi}{6} + \pi k \leq 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + \pi k \\
\frac{-\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi k \leq 2x < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi k \\
\frac{-\pi}{2} + \pi k \leq 2x < \frac{\pi}{6} + \pi k \\
\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \leq x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}
\end{aligned}
$$

Les solutions sont donc

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \right[.$$

Remarque: si on voulait les solutions dans $[0, 2\pi]$, en intersectant les solutions générales trouvées ci-dessus avec $[0, 2\pi]$, on obtient

$$\left[0, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}\right[\cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[.$$



Exemples 1.22

- Résoudre $\cos(2x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$.

$$\cos(2x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \iff \begin{cases} 2x = \frac{x}{4} + 2\pi k \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{x}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} \frac{7x}{4} = 2\pi k \\ \text{ou} \\ \frac{9x}{4} = 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{8\pi k}{7} \\ \text{ou} \\ x = \frac{8\pi k}{9} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

L'ensemble des solutions est donc

$$S = \left\{ \frac{8\pi k}{7}, \frac{8\pi k}{9} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Résoudre $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1$.

  On convertit l'expression en un polynôme en termes de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \\
\iff & 1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \\
\iff & \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\
\iff & \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) = 0 \\
\iff & \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0.
\end{aligned}$$

  On a maintenant deux équations élémentaires.

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \iff \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi + 4\pi k \\ \text{ou} \\ x = -\pi + 4\pi k. \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0 \iff \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \iff \frac{x}{2} = 2\pi k \iff x = 4\pi k.$$

  L'ensemble solution est donc

$$S = \{4\pi k, \pi + 4\pi k, -\pi + 4\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$