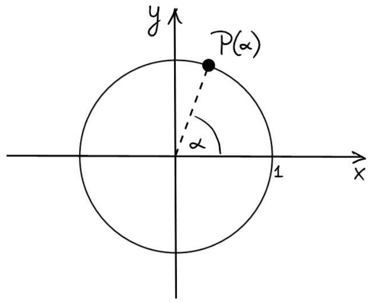
Cours 2

1.2 Le cercle trigonométrique

Soit C un cercle unitaire dessiné dans le plan muni d'un système orthogonal de coordonnées, centré à l'origine. À tout angle trigonométrique $\alpha \in \mathbb{R}$, on associe un point $P(\alpha) \in C$, comme ci-dessous.



On obtient une fonction

$$P : \mathbb{R} \to C$$
$$\alpha \mapsto P(\alpha)$$

Notation utile:

- Le symbole $\exists$ veut dire "il existe". Par exemple, $\exists k \in \mathbb{Z}$ veut dire "il existe k dans $\mathbb{Z}$".
- Le symbole $\forall$ veut dire "pour tout". Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}$ veut dire "pour tout x dans $\mathbb{R}$".

Remarques 1.11

- On a $P(\alpha) = P(\beta) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta = \alpha + 2\pi k$.

  C'est-à-dire, α et β diffèrent d'un nombre entier de tours complets: $\beta - \alpha = 2\pi k$. Dans ce cas, on peut dire que α est égal à β modulo 2π, écrit $\alpha = \beta \bmod 2\pi$.

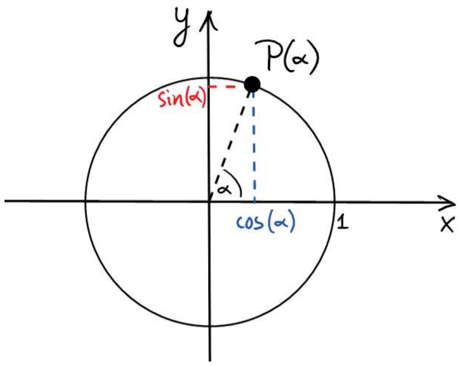
- Les coordonnées x et y d'un point P sur C satisfont $x^2 + y^2 = 1$.

Cosinus et sinus

Définition 1.12

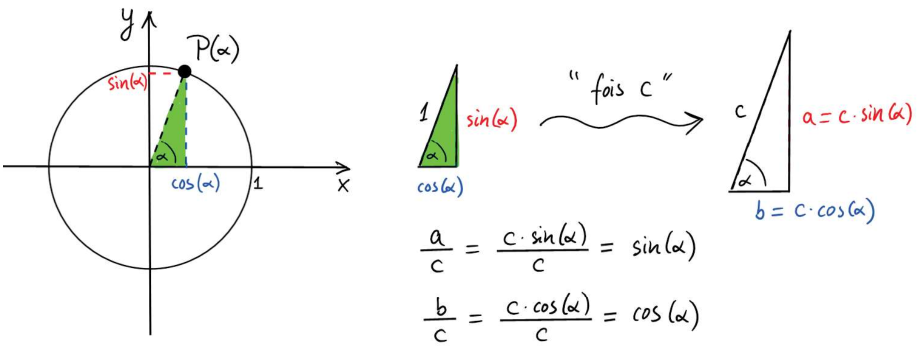
Soit α un angle trigonométrique et $P(\alpha)$ le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

- L'abscisse de $P(\alpha)$ est le *cosinus* de α, noté $\cos(\alpha)$.
- L'ordonnée de $P(\alpha)$ est le *sinus* de α, noté $\sin(\alpha)$.



Remarques 1.13

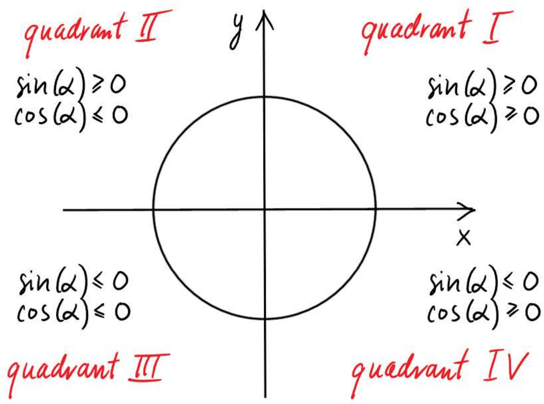
- Ces définitions coïncident avec les notions habituelles de cos et sin pour les angles dans un triangle rectangle:



- cos et sin sont des fonctions $\mathbb{R} \to [-1, 1]$.
- Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors $P(\alpha + 2\pi k) = P(\alpha)$ et donc

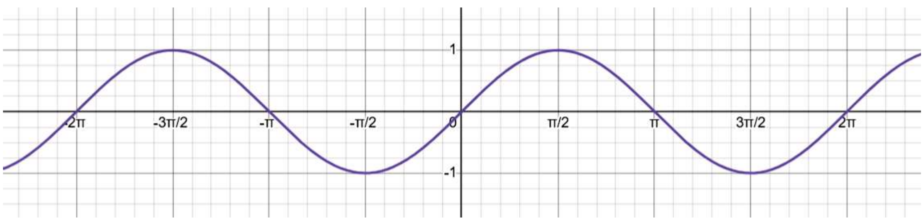
$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos(\alpha),$$
$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin(\alpha).$$

  On dit que les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.
- Dans les quatre quadrants, on a:

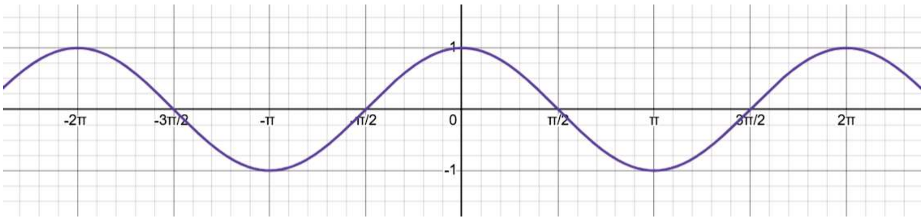


- On a $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

La fonction sin possède le graphe suivant:



La fonction cos possède le graphe suivant:



Notons les domaines où ces fonctions sont croissantes ou décroissantes. Par exemple, sin est croissant sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissant sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Tangente et cotangente

Définition 1.14

La fonction *tangente*, notée tan, est donnée par

$$\begin{aligned} \tan : D_{\tan} &\to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \end{aligned}$$

où le domaine de définition est $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, c'est-à-dire les nombres réels privés de l'ensemble des zéros de cos.

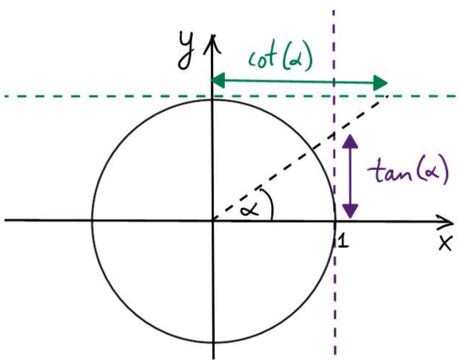
La fonction *cotangente*, notée cot, est donnée par

$$\begin{aligned} \cot : D_{\cot} &\to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}, \end{aligned}$$

où le domaine de définition est $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire les nombres réels privés de l'ensemble des zéros de sin.

Remarques 1.15

- tan et cot peuvent aussi être interprétés géométriquement sur le cercle trigonométrique:

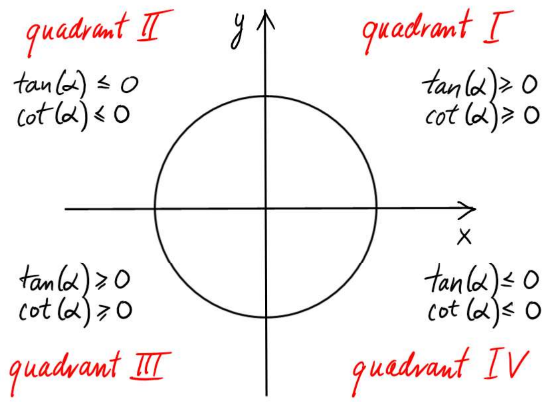


- Ces définitions coïncident avec les notions usuelles de tan et cot pour les angles dans un triangle rectangle.
- tan et cot sont périodiques de période π. En effet, soit $k \in \mathbb{Z}$. On a

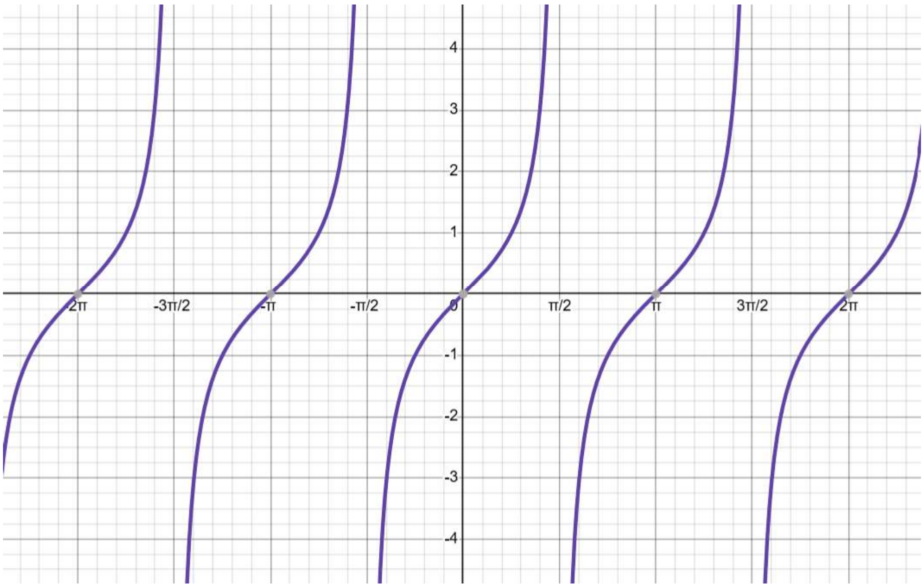
$$\tan(\alpha + k\pi) = \frac{\sin(\alpha + k\pi)}{\cos(\alpha + k\pi)} = \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \text{si } k \text{ pair} \\[2ex] \dfrac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$
$$= \tan(\alpha).$$

(Similairement pour cot.)

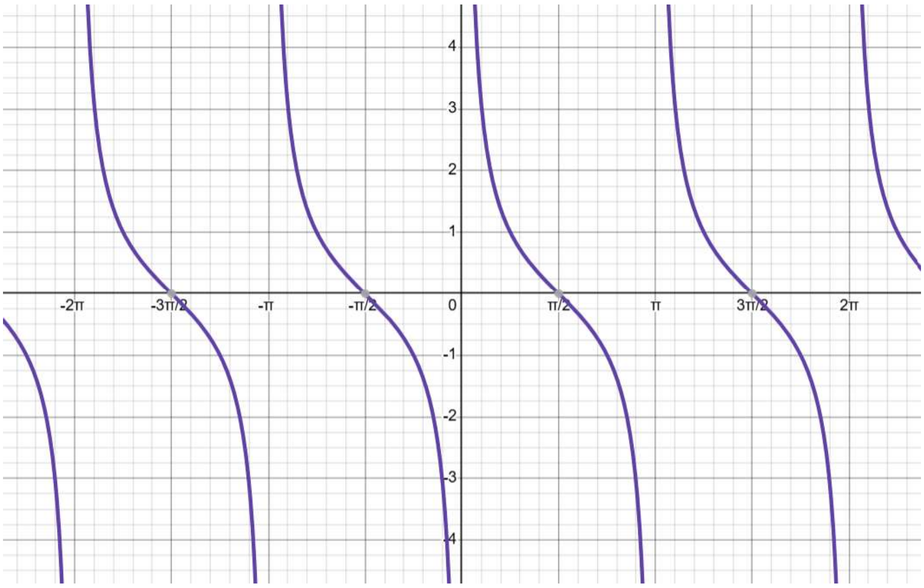
- Dans les quatre quadrants, on a



La fonction tan possède le graphe suivant:



La fonction cot possède le graphe suivant:

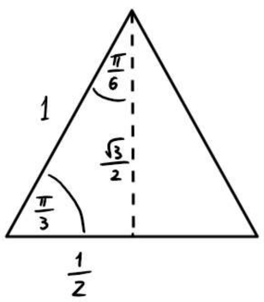


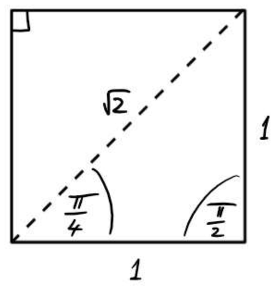
Notons les domaines où ces fonctions sont croissantes ou décroissantes. Par exemple, tan est croissant sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et cot est décroissant sur $]0, \pi[$.

Observons aussi que ces fonctions n'ont pas de maximum, ni de minimum, et qu'il y a des valeurs pour lesquelles ces fonctions ne sont pas définies.

Quelques angles remarquables

On peut déduire des valeurs des fonctions trigonométriques introduites ci-dessus pour certains angles spéciaux en utilisant les formes géométriques suivantes.

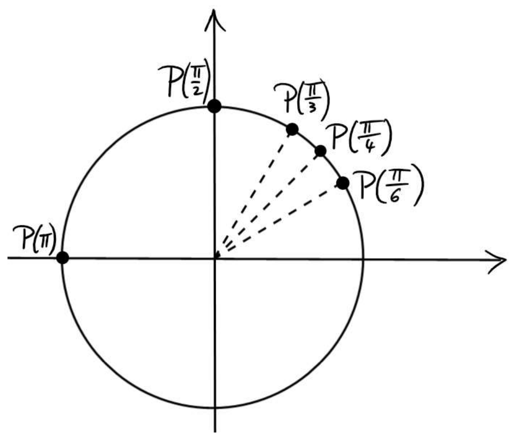




x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie

Remarque: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Voici la position de ces angles sur le cercle trigonométrique.



Pour les angles dans les autres quadrants, on peut utiliser le cercle trigonométrique pour évaluer les fonctions trigonométriques, comme dans les exemples ci-dessous.

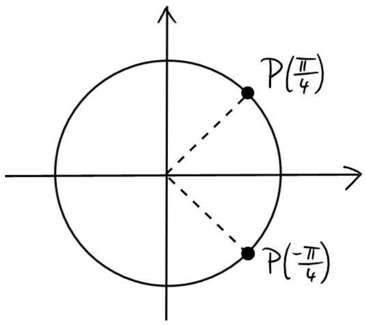
Exemples 1.16

- Calculer $\sin\left(\dfrac{25\pi}{2}\right)$.

  On a $\sin\left(\dfrac{25\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{24\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

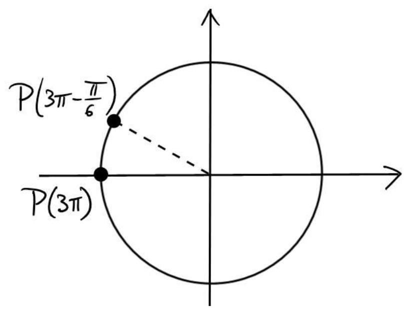
- Calculer $\sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$.

  On a $\sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

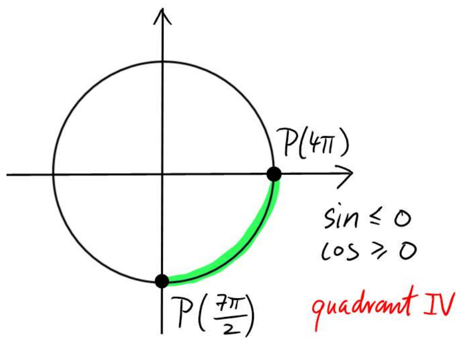


- Calculer $\cos\left(\dfrac{17\pi}{6}\right)$.

  On a $\cos\left(\dfrac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{18\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(3\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

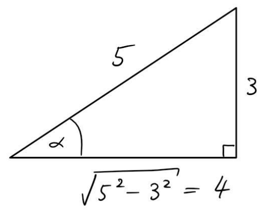


- Calculer la valeur des fonctions trigonométriques cos et sin de l'angle x satisfaisant $\dfrac{7\pi}{2} \leq x \leq 4\pi$ et $\sin(x) = \dfrac{\pm 3}{5}$, c'est-à-dire égal à $\dfrac{3}{5}$ ou $\dfrac{-3}{5}$.
  - **La localisation de** $P(x)$ permet de trouver les signes de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.



Comme $\frac{7\pi}{2} \leq x \leq 4\pi$, on a donc $\sin(x) \leq 0$ et $\cos(x) \geq 0$. On déduit que $\sin(x) = \frac{-3}{5}$.

- **La relation** $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ permet de trouver la valeur absolue des fonctions trigonométriques.



On a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = \left(\frac{-3}{5}\right)^2 + \cos^2(x) = 1$ et donc
$\cos^2(x) = 1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$, d'où $\cos(x) = \frac{\pm 4}{5}$.

- **Conclusion:** comme $\cos(x) \geq 0$, on a donc $\cos(x) = \frac{4}{5}$ et on avait déjà trouvé que $\sin(x) = \frac{-3}{5}$.