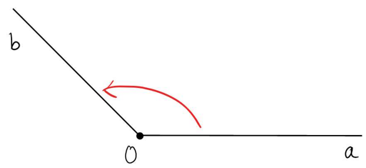
Cours 1

1 Trigonométrie circulaire

1.1 La notion d'angle

Soit O un point du plan, avec a et b deux demi-droites issues de O.

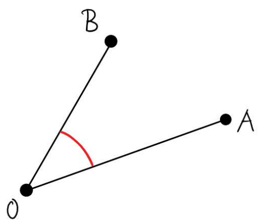


Définition 1.1

La portion du plan balayée par la droite a lorsqu'on la ramène sur b par une rotation est l'*angle géométrique* défini par a et b, noté $\angle(a, b)$. L'angle est *orienté positif* si la rotation est dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, et *orienté négatif* sinon.

Remarques 1.2

- On peut aussi parler de l'angle entre deux vecteurs, $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.
- Si O, A et B sont des sommets, on parle de l'angle $\widehat{AOB}$ (on prend d'habitude la plus petite portion du plan).



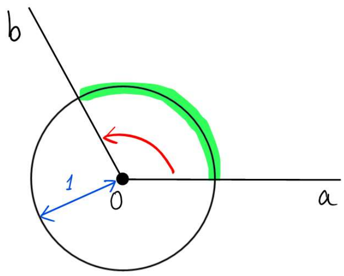
- Cette notion d'angle est utile pour la géométrie élémentaire.

On est habitué à mesurer les angles en degrés, minutes et secondes (rien à voir avec la mesure du temps !):

- il y a $360°$ dans un cercle complet;
- il y a 60 minutes dans un degré, $60' = 1°$;
- il y a 60 secondes dans une minute, $60'' = 1'$.

Dans ce cours, on va surtout utiliser une autre mesure d'angle, défini de la manière suivante.

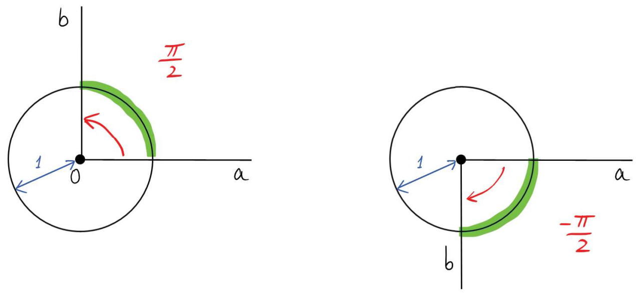
On place un *cercle unitaire* (de rayon 1) centré à l'origine. L'angle en *radians* est la longueur de l'arc du cercle unitaire découpé par la portion du plan correspondant à l'angle.



On donne un signe positif à cette longueur si l'angle est orienté positif, et un signe négatif sinon.

Exemples 1.3

- $360°$ correspond à 2π rad (circonférence d'un cercle unité).
- $90°$ correspond à $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ rad.
- $60°$ correspond à $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ rad.
- $30°$ correspond à $\dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$ rad.
- $45°$ correspond à $\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ rad.
- $1°$ correspond à $\dfrac{2\pi}{360}$ rad.

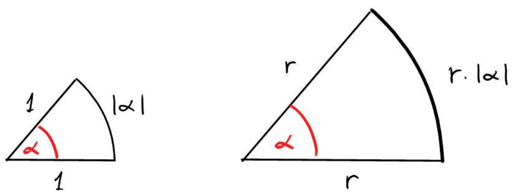


Plus généralement, on a la formule de conversion suivante:

$$\alpha^\circ \text{ correspond à } \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha.$$

Proposition 1.4

- La longueur de l'arc d'un cercle de rayon r correspondant à un angle de α **radians** est donnée par $r \cdot |\alpha|$.
- L'aire d'un secteur circulaire d'un cercle de rayon r correspondant à un angle de α **radians** est donnée par $\pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{\alpha r^2}{2}$.



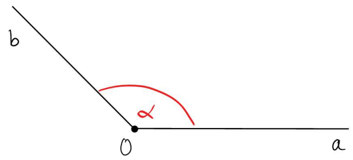
Définition 1.5

Un *angle trigonométrique* est un angle formé par deux droites en tenant compte de l'historique de la rotation ramenant une droite sur l'autre.

Remarques 1.6

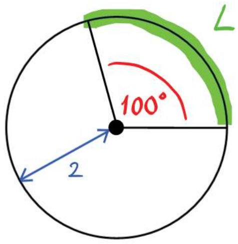
- Un angle géométrique appartient à $[0, 2\pi[$ ou $]-2\pi, 0]$, selon l'orientation. Un angle trigonométrique appartient à $\mathbb{R}$.
- Un point O et deux demi-droites a et b définissent une infinité d'angles trigonométriques, qui se distinguent l'un de l'autre par un multiple entier

(positif ou négatif) de 2π (tours complets). Les angles représentés ci-dessous sont donc $\{\alpha+2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, \alpha-6\pi, \alpha-4\pi, \alpha-2\pi, \alpha, \alpha+2\pi, \alpha+4\pi, \ldots\}$.



Exemple 1.7

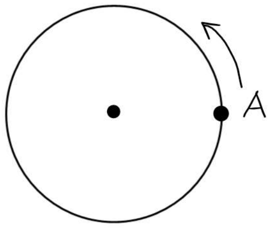
Trouver la longueur d'arc L correspondant à un angle géométrique de $100°$ dans un cercle de rayon 2.



$100°$ correspond à $\dfrac{100}{360} \cdot 2\pi = \dfrac{5\pi}{9}$ radians, et donc on a $L = 2 \cdot \dfrac{5\pi}{9} = \dfrac{10\pi}{9}$.

Exemple 1.8

Deux personnes courent sur une piste circulaire de circonférence 10 km (départ au point A) dans le sens "positif". La vitesse de la première personne est 5 km/h et la vitesse de la deuxième personne est 6 km/h. Déterminer l'instant T auquel les personnes seront de nouveau au même endroit.



On a

- $\alpha_1(t)$ = angle parcouru par la première personne en t heures$= \dfrac{5}{10} \cdot 2\pi t = \pi t$.
- $\alpha_2(t)$ = angle parcouru par la deuxième personne en t heures$= \dfrac{6}{10} \cdot 2\pi t = \dfrac{6\pi}{5} t$.

Les deux personnes sont au même endroit au temps T si les angles $\alpha_1(T)$ et $\alpha_2(T)$ diffèrent d'un nombre entier de tours.

$$\begin{aligned} \alpha_2(T) - \alpha_1(T) = 2\pi n, &\quad n \in \mathbb{N}^* \\ \iff \frac{6\pi}{5}T - \pi T = 2\pi n, &\quad n \in \mathbb{N}^* \\ \iff \frac{\pi}{5}T = 2\pi n, &\quad n \in \mathbb{N}^* \\ \iff T = 10n, &\quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Le premier instant auquel les personnes se trouvent au même endroit correspond à $n = 1$, on a donc $T = 10$ h.

Exemple 1.9

Un hamster court sur une roue de rayon 10 cm à la vitesse d'un tour par seconde. Quelle distance aurait-il parcouru par terre en 30 min ?

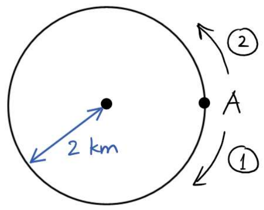
La circonférence est donnée par $2\pi \cdot 10 = 20\pi$ cm.

La vitesse est donc donnée par 20π cm/s.

En 30 min, c'est-à-dire $30 \cdot 60 = 1800$ secondes, le hamster aurait parcouru $1800 \cdot 20\pi = 36000\pi \approx 113040$ cm ≈ 1.13 km.

Exemple 1.10

Deux personnes courent sur une piste circulaire de rayon 2 km (départ au point A) dans des sens opposés. La vitesse de la première personne est π km/h et la vitesse de la deuxième personne est 2π km/h. Déterminer les instants auxquels les personnes sont au même endroit.



La circonférence du cercle est $2 \cdot 2\pi = 4\pi$ km.

- $\alpha_1(t)$ = angle parcouru par la première personne en t heures$= -\frac{\pi}{4\pi} \cdot 2\pi t = \frac{-\pi}{2} t$.
- $\alpha_2(t)$ = angle parcouru par la deuxième personne en t heures$= \frac{2\pi}{4\pi} \cdot 2\pi t = \pi t$.

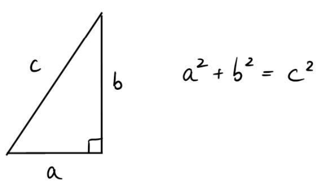
Les deux personnes sont au même endroit au temps t si les angles $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ diffèrent d'un nombre entier de tours.

$$
\begin{aligned}
\alpha_2(t) - \alpha_1(t) &= 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N} \\
\iff \pi t - \left(\frac{-\pi}{2} t\right) &= 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N} \\
\iff \frac{3\pi}{2} t &= 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N} \\
\iff t &= \frac{4n}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Les personnes se trouvent donc au même endroit quand $t = \frac{4n}{3}$ heures, où $n \in \mathbb{N}$.

Quelques rappels pour la série:

Théorème de Pythagore



Théorème de Thalès