Cours 12

4.2 Fonction exponentielle

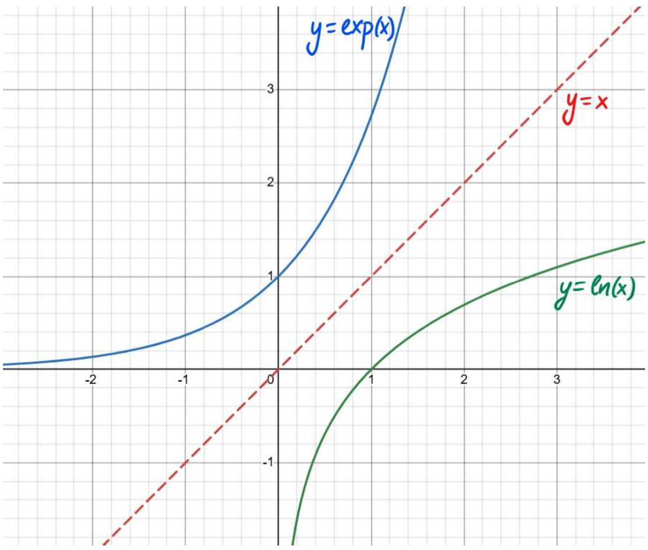
On a montré que la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective. Elle admet donc une fonction réciproque.

Définition 4.7

La fonction réciproque de ln, appelée la *fonction exponentielle*, est donnée par

$$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$
$$x \mapsto y, \text{ où } \ln(y) = x$$

On obtient le graphe de la fonction exp à partir du graphe de ln par réflexion par rapport à la droite $y = x$.



On déduit les propriétés suivantes immédiatement:

- exp est strictement croissante
- exp est continue sur $\mathbb{R}$

- $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$
- $\exp(\ln(x)) = x\ \forall x > 0$, $\ln(\exp(x)) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$

On montre les propriétés suivantes de exp:

(1) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(2) $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(3) $\exp(p) = e^p$, $\forall p \in \mathbb{Q}$

(4) $a^p = \exp(p\ln(a))$, $\forall a > 0$, $\forall p \in \mathbb{Q}$

(5) $\exp(px) = [\exp(x)]^p$, $\forall p \in \mathbb{Q}$

(6) exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$

Preuve. (1) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

Comme ln est une fonction bijective, il existe $a > 0$ tel que $x = \ln(a)$ et $b > 0$ tel que $y = \ln(b)$. On a donc

$\exp(x + y) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab = \exp(x)\exp(y)$.

(2) $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

On a $1 = \exp(0) = \exp(y-y) = \exp(y)\exp(-y)$ et donc $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$.
On déduit donc que

$\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

(3) $\exp(p) = e^p$, $\forall p \in \mathbb{Q}$:

$\exp(p) = \exp(p \cdot 1) = \exp(p\ln(e)) = \exp(\ln(e^p)) = e^p$.

(4) $a^p = \exp(p\ln(a))$, $\forall a > 0$, $\forall p \in \mathbb{Q}$:

$a^p = \exp(\ln(a^p)) = \exp(p\ln(a))$.

(5) $\exp(px) = [\exp(x)]^p$, $\forall p \in \mathbb{Q}$:

$\exp(px) = \exp(p\ln(\exp(x))) = [\exp(x)]^p$ par le point ci-dessus.

(6) exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$:

On a

$$\begin{aligned} & x = \ln(\exp(x)) \\ \Longrightarrow & [x]' = \ln'(\exp(x)) \cdot \exp'(x) \\ \Longrightarrow & 1 = \frac{1}{\exp(x)} \cdot \exp'(x) \\ \Longrightarrow & \exp'(x) = \exp(x). \end{aligned}$$

$\square$

Remarques 4.8

- En vue du point (3), on peut écrire $\exp(x) = e^x$.
- La dérivée de la fonction exp est égale à la fonction elle-même. Géométriquement, ceci signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la pente de la tangente en x au graphe de exp est égale à sa valeur en x.

4.3 Fonction exponentielles et logarithmes de base quelconque

On dit que ln et exp sont *de base e* car $\ln(e) = 1$ et $\exp(1) = e$. On peut aussi définir des fonctions avec des propriétés similaires par rapport à une autre base, $a > 0$.

Définition 4.9

Soit $a > 0$. La *fonction exponentielle de base a* est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to]0, +\infty[\\ x &\mapsto a^x = \exp(x \ln(a)) \end{aligned}$$

Les propriétés de la fonction a^x sont analogues à celles de e^x. En particulier,

- $(a^x)^p = a^{px}$, $\forall p \in \mathbb{Q}$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

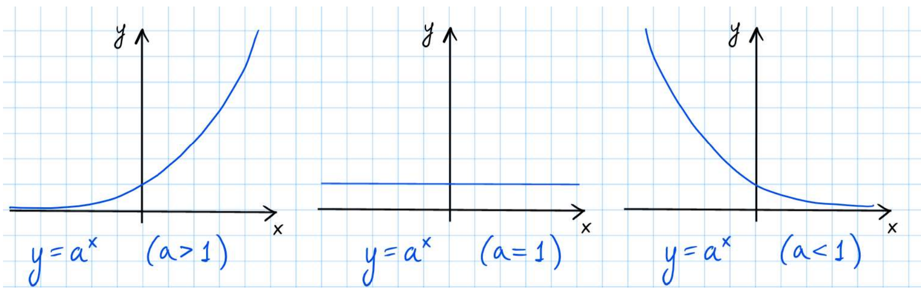
Si $0 < a < 1$, a^x est strictement décroissante, car

$$x < y \Longrightarrow \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \exp\left(\underbrace{(x-y)}_{<0}\underbrace{\ln(a)}_{<0}\right) > 1 \Longrightarrow a^x > a^y.$$

Si $a = 1$, $1^x = e^{x\ln(1)} = e^0 = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si $a > 1$, a^x est strictement croissante car

$$x < y \Longrightarrow \frac{a^x}{a^y} = \exp\left(\underbrace{(x-y)}_{<0}\underbrace{\ln(a)}_{>0}\right) < 1 \Longrightarrow a^x < a^y.$$



On remarque les limites suivantes:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

La dérivée est donnée par

$$[a^x]' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x.$$

La dérivée est donc proportionnelle à la fonction.

Attention: la dérivée de a^x n'est pas xa^{x-1}.

On remarque que $a^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est bijective, ce qui nous permet de considérer sa réciproque.

Définition 4.10

Soit $a > 0$, $a \neq 1$. Le *logarithme de base* a est la réciproque de la fonction a^x, défini par

$$\begin{aligned} \log_a :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \log_a(x) \text{ où } a^y = x \end{aligned}$$

Notation: $\log_{10}(x) = \log(x)$, $\log_e(x) = \ln(x)$.

Remarques 4.11

- $\log_a$ permet de trouver x tel que $a^x = b$. On a $x = \log_a(b)$.
  Par exemple, $3^x = 9 \Longrightarrow x = \log_3(9) = 2$.
- $\log_1$ n'est pas défini car 1^x n'est pas injectif, $1^x = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- On a

$$\begin{aligned} \log_a(x) = y &\iff x = a^y \\ &\iff x = e^{y \ln(a)} \\ &\iff \ln(x) = y \ln(a) \\ &\iff y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

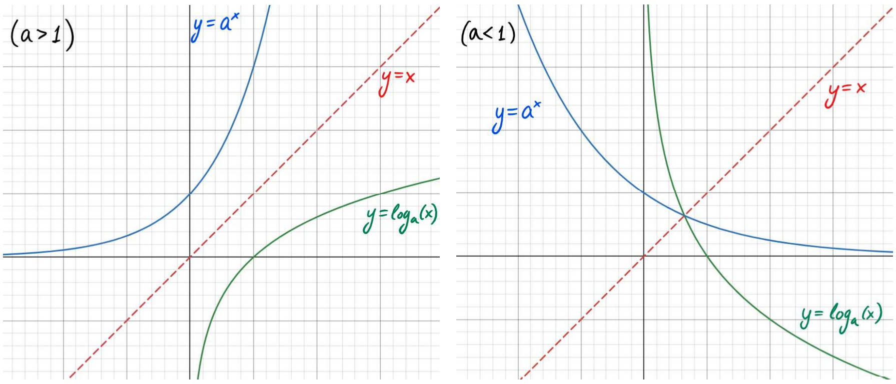
  Donc $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}\ \forall a > 1, a \neq 1$.
- $\log_a(x)$ satisfait des propriétés analogues à celles de $\ln(x)$.
- $[\log_a(x)]' = \left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \dfrac{1}{\ln(a)} \cdot \dfrac{1}{x}$.

- On a $\forall x, a, b > 0,\ a, b \neq 1$,

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

car $\dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \dfrac{\ln(x)/\ln(a)}{\ln(b)/\ln(a)} = \dfrac{\ln(x))}{\ln(b)} = \log_b(x)$.

Le graphe de $\log_a(x)$ est obtenu à partir du graphe de a^x par une réflexion par rapport à la droite $y = x$.



On remarque les formes différentes selon la valeur de a ($a > 1$ ou $a < 1$).

Exemples 4.12

- Résoudre $\log_{1/2}(x^2 - 1) \geq \log_{1/2}(2 - x) + \log_{1/2}(3 - x)$.

  $D_{def} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0, 2 - x > 0, 3 - x > 0\} =]-\infty, -1[\, \cup\,]1, 2[$.

$$\begin{aligned}
& \log_{1/2}(x^2 - 1) \geq \log_{1/2}(2 - x) + \log_{1/2}(3 - x) \\
\iff & \log_{1/2}(x^2 - 1) \geq \log_{1/2}[(2 - x)(3 - x)] \\
\iff & x^2 - 1 \leq (2 - x)(3 - x) \quad \textcolor{red}{(\log_{1/2}(x) \text{ décroissant})} \\
\iff & x^2 - 1 \leq 6 - 5x + x^2 \\
\iff & 5x \leq 7 \\
\iff & x \leq \frac{7}{5}
\end{aligned}$$

$$S = \left]-\infty, \frac{7}{5}\right] \cap D_{def} =]-\infty, -1[\, \cup \left]1, \frac{7}{5}\right].$$

- Résoudre $e^{3x+1} - 2e^{2x+1} - 3e^{x+1} = 0$.

$$\begin{aligned}
& e^{3x+1} - 2e^{2x+1} - 3e^{x+1} = 0 \\
\iff & e(e^{3x} - 2e^{2x} - 3e^{x}) = 0 \\
\iff & y^3 - 2y^2 - 3y = 0 \quad {\color{red}(y = e^x)} \\
\iff & y(y^2 - 2y - 3) = 0 \\
\iff & y(y+1)(y-3) = 0
\end{aligned}$$

$$\iff \ y = 0 \text{ ou } y = -1 \text{ ou } y = 3$$

$y = e^x = 0$ n'a pas de solution car $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$y = e^x = -1$ n'a pas de solution car $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$y = e^x = 3 \iff x = \ln(3)$.

On a donc $S = \{\ln(3)\}$.