4 Fonction logarithmes et exponetielles

4.1 Fonction logarithme naturel

Un logarithme nous aide à exprimer l'exposant a auquel il faut élever un nombre b pour obtenir un nombre c, c'est-à-dire $b^a = c$.

Exemple 4.1

Soit $f(x)$ une fonction telle que $3^{f(x)} = x$.

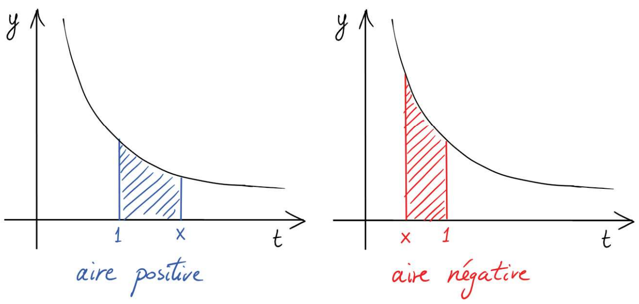
On a $3^{f(9)} = 9$, donc $f(9) = 2$.

On a $3^{f(27)} = 27$, donc $f(27) = 3$.

Remarquons que $3^{f(9)+f(27)} = 3^{f(9)} \cdot 3^{f(27)} = 9 \cdot 27 = 3^{f(9\cdot 27)}$ et donc $f(9) + f(27) = f(9 \cdot 27)$.

On va définir des fonctions avec cette propriété, en commençant par la définition géométrique suivante.

Considérons le graphe de $y = \dfrac{1}{t}$ pour $t > 0$.



On regarde l'aire délimitée par les droites $y = 0$, $t = 1$, $t = x$, et la courbe $y = \dfrac{1}{t}$. L'*aire signée* est considérée comme positive si $x > 1$ et négative si $0 < x < 1$.

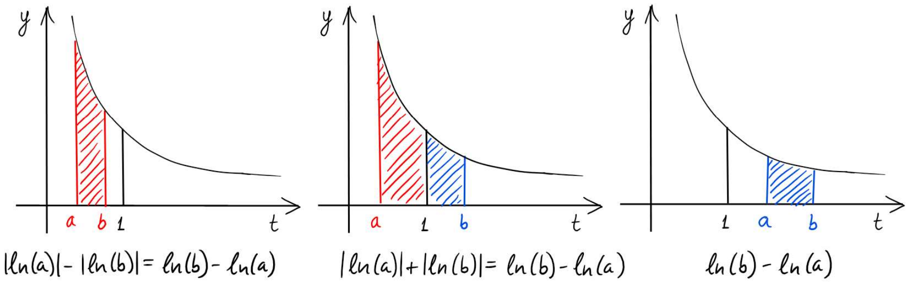
Définition 4.2

La fonction *logarithme naturel*, notée ln, est donnée par

$$\begin{aligned} \ln : \,]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{l'aire signée du domaine délimité par } y=0, t=1, t=x, \text{ et } y=\frac{1}{t} \end{aligned}$$

Remarque 4.3

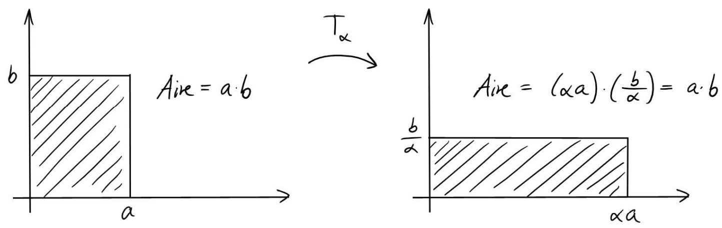
L'aire non signée sous la courbe $y = \dfrac{1}{t}$ entre a et b avec $0 < a < b$ peut être déduite de la fonction ln, par la formule $\ln(b) - \ln(a)$.



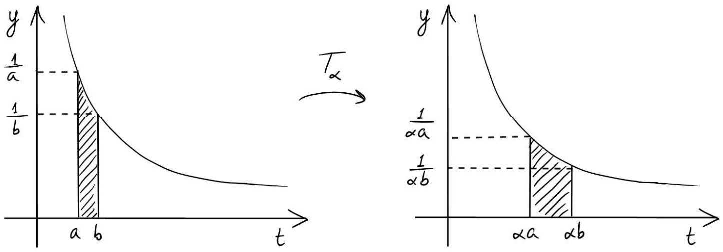
Afin d'étudier les propriétés du logarithme, définissons l'application suivante. Pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} T_\alpha : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left(\alpha x, \frac{y}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Une propriété utile de T_α est que T_α préserve les aires des domaines.

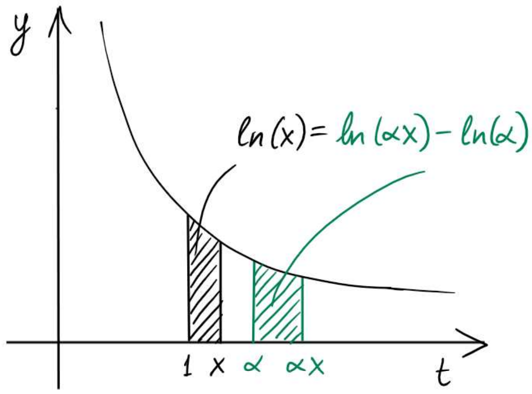


En particulier, cette application préserve l'aire d'un domaine sous la courbe $\dfrac{1}{t}$.



On peut maintenant déduire quelques propriétés basiques de ln.

- Puisque T_α préserve l'aire du domaine entre 1 et x sous la courbe $\frac{1}{t}$, on a $\ln(x) = \ln(\alpha x) - \ln(\alpha)$ et donc $\ln(x) + \ln(\alpha) = \ln(\alpha x)$.



On a alors

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy), \quad \forall x, y > 0.$$

- $\ln(1) = 0$.
- Puisque $0 = \ln(1) = \ln\left(\frac{1}{x}x\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x)$, on a

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \quad \forall x > 0.$$

- Puisque $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$, on a

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \quad \forall x, y > 0.$$

- $\ln(x^p) = p\ln(x)$, $\forall x > 0$, $p \in \mathbb{Q}$.

Voici la preuve de cette dernière affirmation.

Preuve. Pour $p \in \mathbb{N}$, on procède par récurrence.

- $p = 0$: $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \cdot \ln(x)$.
- En supposant que c'est vrai pour p, c'est-à-dire $\ln(x^p) = p\ln(x)$, montrons le pour $p+1$:

  $\ln(x^{p+1}) = \ln(x \cdot x^p) = \ln(x) + \ln(x^p) = \ln(x) + p\ln(x) = (p+1)\ln(x)$.
- La formule est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on a $\ln(x^{-p}) = \ln\left(\frac{1}{x^p}\right) = \ln(1) - \ln(x^p) = -p\ln(x)$, et donc la formule est vraie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$,
$\ln(x) = \ln\left(x^{\frac{q}{q}}\right) = q\ln\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$, donc $\ln\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q}\ln(x)$, d'où

$$\begin{aligned}\ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) &= \ln\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)\\ &= p \cdot \frac{1}{q}\ln(x)\\ &= \frac{p}{q}\ln(x).\end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{Q}$. □

Proposition 4.4

(1) ln est strictement croissant.

(2) ln est continue sur son domaine de définition $]0, +\infty[$.

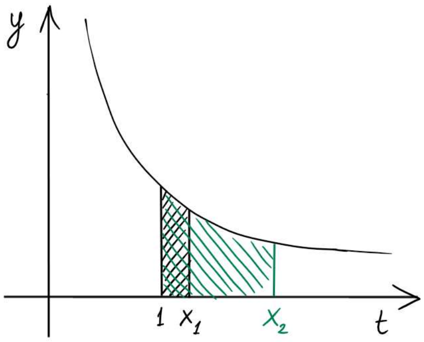
(3) ln est une bijection $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

(4) $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

(5) $\ln(x)$ est dérivable sur son domaine de définition et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x > 0$.

Preuve.

(1) ln est strictement croissant:

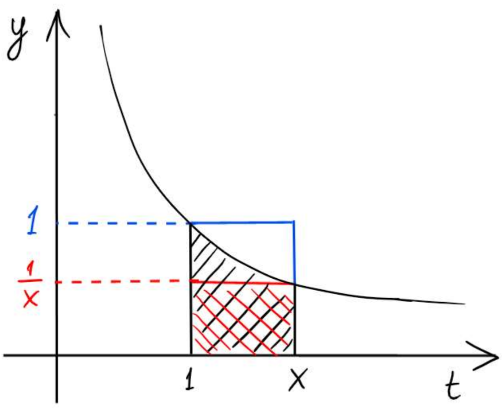


Si $x_1 < x_2$, alors l'aire signée sous la courbe $\frac{1}{t}$ entre 1 et x_1 est strictement plus petite que l'aire signée entre 1 et x_2, et donc $\ln(x_1) < \ln(x_2)$.

(2) ln est continue sur son domaine de définition $]0, +\infty[$:

On établit d'abord la continuité en $x_0 = 1$. Pour $x > 1$, on a

$$(x-1)\frac{1}{x} < \ln(x) < (x-1) \cdot 1$$



En prenant $\lim_{x \to 1^+}$, on a

$$0 = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x} \leq \lim_{x \to 1^+} \ln(x) \leq \lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0$$

et on a donc $\lim_{x \to 1^+} \ln(x) = 0$ par le théorème des deux gendarmes.
On montre que $\lim_{x \to 1^-} \ln(x) = 0$ par un raisonnement similaire. Ainsi, $\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0 = \ln(1)$ et $\ln(x)$ est donc continue en 1.
Pour $x_0 \in]0, +\infty[$, $x_0 \neq 1$, on a

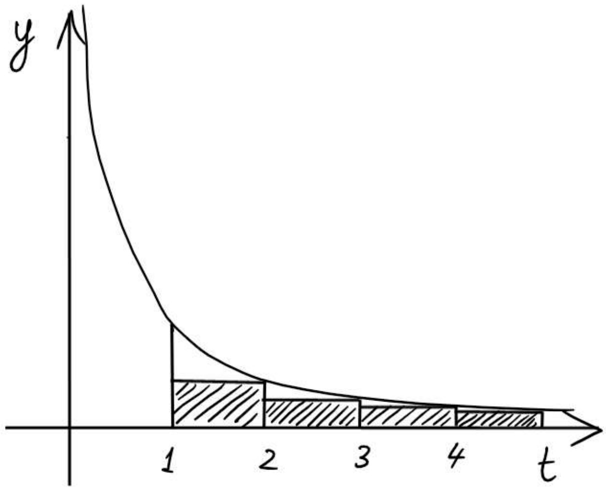
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \ln(x) &= \lim_{x \to x_0} [\ln(x) - \ln(x_0) + \ln(x_0)] \\
&= \lim_{x \to x_0} \left[\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + \ln(x_0)\right] \\
&= \ln(1) + \ln(x_0) \\
&= \ln(x_0)
\end{aligned}$$

et donc $\ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

(3) ln est une bijection $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$:

Une fonction strictement croissante et continue est forcément bijective sur son image. Le prochain point montre que l'image est $\mathbb{R}$.

(4) $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$:



Pour $x \geq 2^n$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(x) &> \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) \geq \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$:

On écrit $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{z \to +\infty} -\ln(z) = -\infty$, en posant la substitution $z = \dfrac{1}{x}$.

(5) $\ln(x)$ est dérivable sur son domaine de définition et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\forall x > 0$:

On établit d'abord que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$. On a, pour $x > 1$:
$(x-1)\dfrac{1}{x} < \ln(x) < (x-1) \cdot 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{\ln(x)}{x-1} < 1$. Le théorème des deux gendarmes implique que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$, et on montre que $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ d'une manière similaire.

Soit $x_0 \in \,]0, +\infty[$. On a

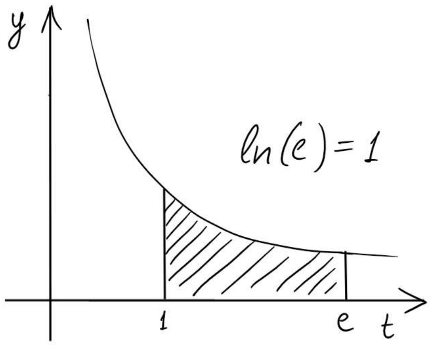
$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h/x_0} \cdot \frac{1}{x_0} \\
&= \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{z \to 1} \frac{\ln(z)}{z-1} \\
&= \frac{1}{x_0}.
\end{aligned}$$

On a utilisé la substitution $z = 1 + \dfrac{h}{x_0}$.
La fonction $\ln(x)$ est donc dérivable en tout $x_0 \in]0, +\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

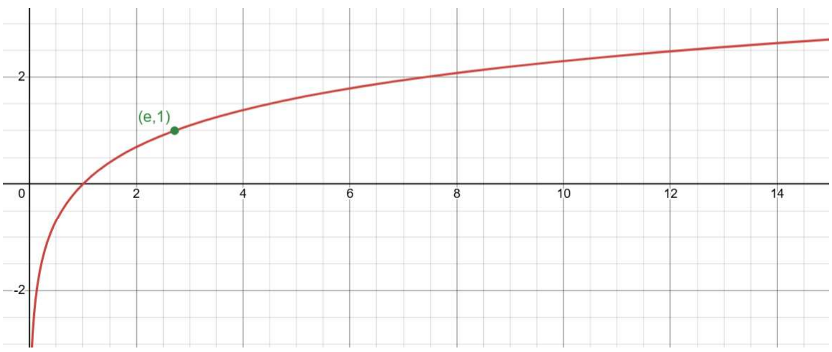
$\square$

Remarques 4.5

- Puisque $\ln(x)$ est une fonction bijective, on a $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$.
- On a constaté que $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.
- $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0\ \forall x > 0$ implique que $\ln(x)$ est strictement croissant, mais avec un taux de croissance qui devient de plus en plus faible.
- $\ln(x) = 1$ pour exactement un nombre réel, $\ln(e) = 1$ où e est le *nombre de Euler*, $e = 2.718281828\ldots$ (un nombre irrationnel). Ce nombre e est appelé *la base* du logarithme naturel ln. Remarquons qu'on peut montrer que $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (cf. Analyse I).



Voici le graphe de $\ln(x)$.



Exemples 4.6

- Résoudre $\ln(1-x) + \ln(x) \leq 2$.

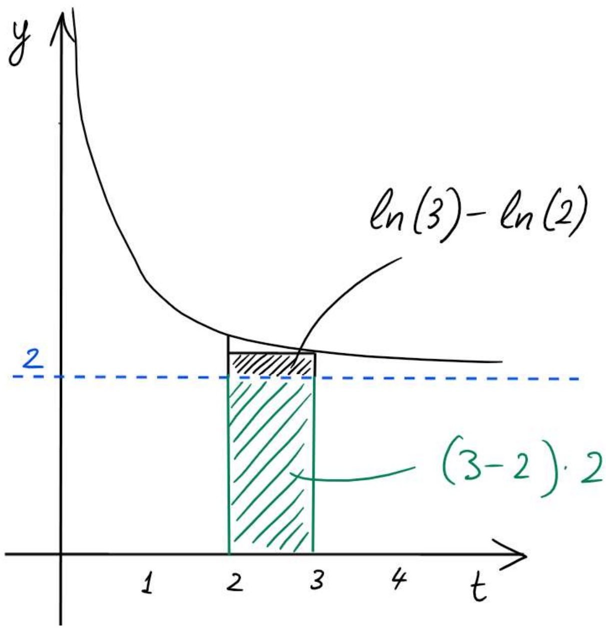
$D_{def} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x > 0 \text{ et } x > 0\} =]0, 1[.$

$$\begin{aligned} \ln(1-x) + \ln(x) \leq 2 &\iff \ln[(1-x)x] \leq 2 = 2\ln(e) = \ln(e^2) \\ &\iff (1-x)x \leq e^2 \quad \text{car ln croissant} \\ &\iff x^2 - x + e^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant est $\Delta = 1 - 4e^2 < 0$, et donc $x^2 - x + e^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

La solution est donc $S = \mathbb{R} \cap D_{def} =]0, 1[$.

- Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $y = \dfrac{2x+1}{x}$ et les droites $y = 0$, $x = 2$ et $x = 3$.



On a $\dfrac{2x+1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x}$, et donc l'aire est donnée par $2 + \ln(3) - \ln(2)$.