

Corrigé 8

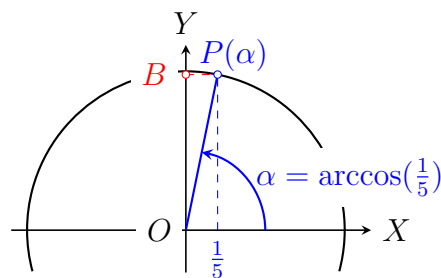
1. Calculer, sans machine, les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A = \cos(\arcsin(-3)) & \text{c) } C = \tan(\arccos(-\frac{1}{3})) & \text{e) } E = \cos(2 \arccos(\frac{2}{5})) \\ \text{b) } B = \sin(\arccos(\frac{1}{5})) & \text{d) } D = \tan(\pi - \arctan(2)) & \text{f) } F = \sin(-2 \arctan(2)) \end{array}$$

a) $\arcsin(-3)$ n'a pas de sens, car il n'existe aucun angle dont le sinus vaut -3 .
Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \arcsin(x)$ est $D_f = [-1, 1]$.
Donc $A = \cos(\arcsin(-3))$ n'existe pas.

b) On exprime $B = \sin(\arccos(\frac{1}{5}))$ à l'aide de la fonction cosinus en utilisant la relation de Pythagore :

$$\begin{aligned} B^2 &= \sin^2(\arccos(\frac{1}{5})) \\ &= 1 - \cos^2(\arccos(\frac{1}{5})) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}. \end{aligned}$$



Or $\alpha = \arccos(\frac{1}{5})$ est un angle qui appartient à l'intervalle $[0, \pi]$, on en déduit donc que son sinus est positif :

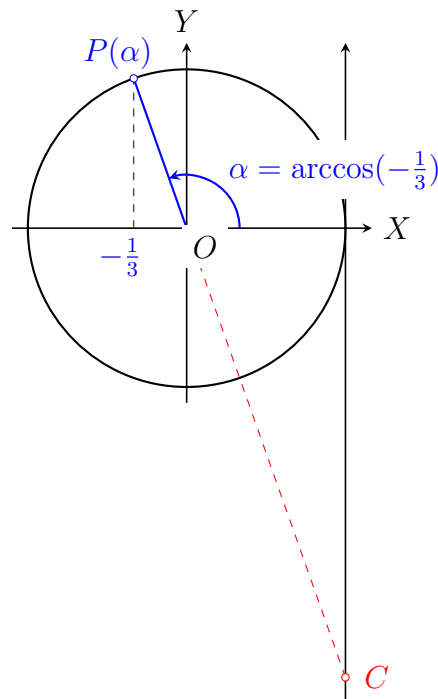
$$B = +\sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

c) On exprime $C = \tan(\alpha)$ à l'aide de la fonction cosinus :

$$C = \tan(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}.$$

Or $\alpha = \arccos(-\frac{1}{3})$ est un angle qui appartient à l'intervalle $[0, \pi]$, on en déduit donc que son sinus est positif :

$$\begin{aligned} C &= \frac{+\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \\ &= \frac{+\sqrt{1 - (-\frac{1}{3})^2}}{-\frac{1}{3}} \\ &= -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

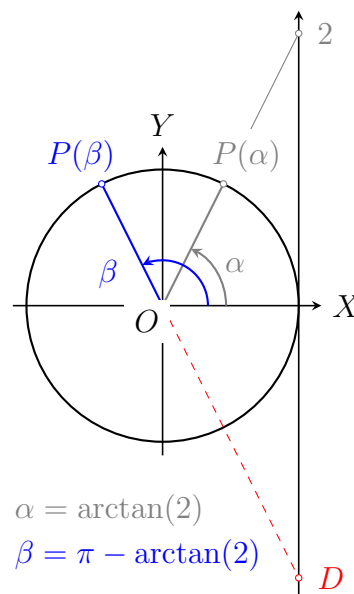


- d) Les points $P(\alpha)$ et $P(\pi - \alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

On en déduit que

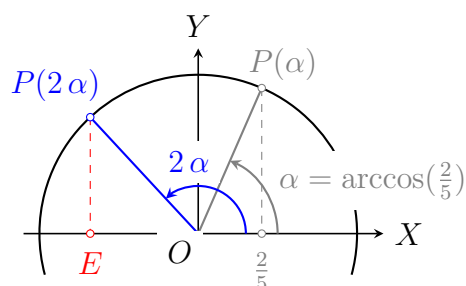
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

$$\begin{aligned} D &= \tan(\pi - \arctan(2)) \\ &= -\tan(\arctan(2)) \\ &= -2. \end{aligned}$$



- e) On utilise l'expression du cosinus de l'angle double : $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

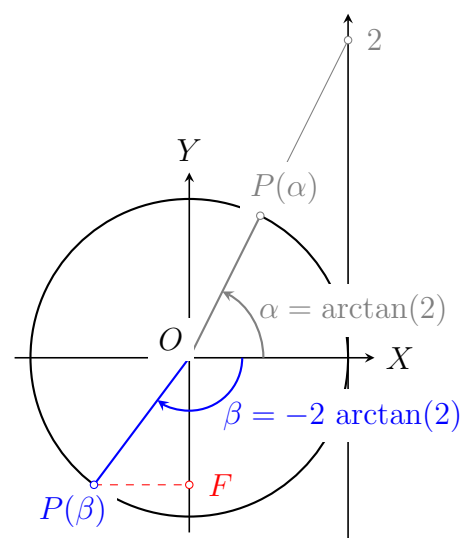
$$\begin{aligned} E &= \cos\left(2\arccos\left(\frac{2}{5}\right)\right) \\ &= 2\cos^2\left(\arccos\left(\frac{2}{5}\right)\right) - 1 \\ &= 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 \\ &= -\frac{17}{25}. \end{aligned}$$



- f) On utilise l'expression du sinus de l'angle double en fonction de la tangente :

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ &= 2\tan(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \\ &= \frac{2\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \sin(-2\arctan(2)) \\ &= -\sin(2\arctan(2)) \\ &= -\frac{2\tan(\arctan(2))}{1 + \tan^2(\arctan(2))} \\ &= -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$



2. Calculer, sans machine, les valeurs suivantes :

a) $A = \arccos(\cos(\frac{17\pi}{3}))$

c) $C = \arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{12}))$

b) $B = \arctan(\tan(-\frac{7\pi}{12}))$

d) $D = \arctan(-\cot(\frac{13\pi}{5}))$

a) $A = \arccos(\cos(\frac{17\pi}{3}))$.

On cherche à exprimer $\cos(\frac{17\pi}{3})$ comme le cosinus d'un angle appartenant à la détermination principale du cosinus : $[0, \pi]$.

$$\cos(\frac{17\pi}{3}) = \cos(\frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}).$$

D'où : $A = \arccos(\cos(\frac{17\pi}{3})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$.

b) $B = \arctan(\tan(-\frac{7\pi}{12}))$.

On cherche à exprimer $\tan(-\frac{7\pi}{12})$ comme la tangente d'un angle appartenant à la détermination principale de la tangente : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\tan(-\frac{7\pi}{12}) = \tan(-\frac{7\pi}{12} + \pi) = \tan(\frac{5\pi}{12}).$$

D'où : $B = \arctan(\tan(-\frac{7\pi}{12})) = \arctan(\tan(\frac{5\pi}{12})) = \frac{5\pi}{12}$.

c) $C = \arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{12}))$.

On cherche à exprimer $\cos(-\frac{7\pi}{12})$ comme le sinus d'un angle appartenant à la détermination principale du sinus : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\cos(-\frac{7\pi}{12}) = \sin[\frac{\pi}{2} - (-\frac{7\pi}{12})] = \sin(\frac{13\pi}{12}) = \sin(\pi - \frac{13\pi}{12}) = \sin(-\frac{\pi}{12}).$$

D'où : $C = \arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{12})) = \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{12})) = -\frac{\pi}{12}$.

d) $D = \arctan(-\cot(\frac{13\pi}{5}))$.

On cherche à exprimer $-\cot(\frac{13\pi}{5})$ comme la tangente d'un angle appartenant à la détermination principale de la tangente : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$-\cot(\frac{13\pi}{5}) = \cot(-\frac{13\pi}{5}) = \tan[\frac{\pi}{2} - (-\frac{13\pi}{5})] = \tan(\frac{31\pi}{10}) = \tan(\frac{\pi}{10}).$$

D'où : $D = \arctan(-\cot(\frac{13\pi}{5})) = \arctan(\tan(\frac{\pi}{10})) = \frac{\pi}{10}$.

3. Montrer que : $\arcsin(\frac{3}{5}) + \arccos(\frac{15}{17}) = \arcsin(\frac{77}{85})$.

Soient $\alpha = \arcsin(\frac{3}{5})$ et $\beta = \arccos(\frac{15}{17})$.

Pour montrer que $\alpha + \beta = \arcsin(\frac{77}{85})$, il faut montrer que $\alpha + \beta$ vérifie les deux propriétés caractéristiques qui définissent $\arcsin(\frac{77}{85})$:

i) $\alpha + \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ii) et $\sin(\alpha + \beta) = \frac{77}{85}$.

i) Pour vérifier que $\alpha + \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on peut montrer, par exemple, que

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4}.$$

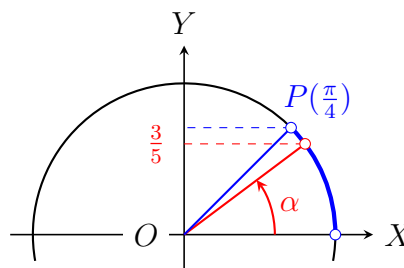
* Montrons que $\alpha = \arcsin(\frac{3}{5})$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{d'où} \quad 0 < \sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\text{donc} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$



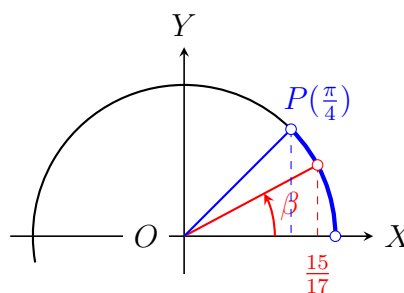
* Montrons que $\beta = \arccos(\frac{15}{17})$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

$$\cos \beta = \frac{15}{17} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{15}{17} < 1,$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \beta < 1.$$

Or la fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\text{donc} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4}.$$



* On en conclut que $\alpha + \beta$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

ii) Calcul de $\sin(\alpha + \beta)$ avec $\alpha = \arcsin(\frac{3}{5})$ et $\beta = \arccos(\frac{15}{17})$.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{17} + \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} \\ &= \frac{1}{5 \cdot 17} \left[3 \cdot 15 + \sqrt{5^2 - 3^2} \cdot \sqrt{17^2 - 15^2} \right] \\ &= \frac{1}{85} \left[45 + \sqrt{25 - 9} \cdot \sqrt{(17 - 15) \cdot (17 + 15)} \right] \\ &= \frac{1}{85} \left[45 + \sqrt{16} \cdot \sqrt{64} \right] \\ &= \frac{1}{85} [45 + 4 \cdot 8] \\ &= \frac{77}{85}. \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{77}{85} \quad \text{et} \quad \alpha + \beta \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = \arcsin\left(\frac{77}{85}\right).$$

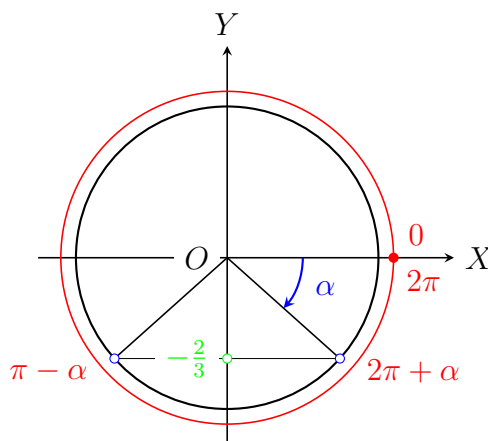
4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné :

- a) $\sin x = -\frac{2}{3}$, $x \in [0, 2\pi]$, e) $\tan x = -\frac{3}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$,
 b) $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{2}{3}$, $x \in [\pi, 3\pi]$, f) $\cot(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{3}{2}$, $x \in]\pi, 3\pi[$,
 c) $\sin(2x) = \frac{2}{3}$, $x \in [-\pi, 0]$, g) $\tan(2x) = 2$, $x \in]-\pi, 0[$,
 d) $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$, $x \in [\pi, 3\pi]$, h) $\cot(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$, $x \in]\pi, 3\pi[$.
-

a) Résolution de l'équation $\sin x = -\frac{2}{3}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

• Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



• Résolution sur l'intervalle $[0, 2\pi]$

Soit $\alpha = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, l'équation $\sin x = -\frac{2}{3}$ admet deux solutions

- l'une est engendrée par $\alpha + 2k\pi$ avec $k = 1$,
- l'autre est engendrée par $\pi - \alpha + 2k\pi$ avec $k = 0$.

$$S = \left\{ \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right), 2\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) \right\},$$

$$\text{ou} \quad S = \left\{ \pi + \arcsin\left(\frac{2}{3}\right), 2\pi - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \right\}.$$

b) Résolution de l'équation $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{2}{3}$ sur l'intervalle $[\pi, 3\pi]$.

• Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{2}{3} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \arccos(-\frac{2}{3}) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{3} = -\arccos(-\frac{2}{3}) + 2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \arccos(-\frac{2}{3}) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} - \arccos(-\frac{2}{3}) + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Remarques :

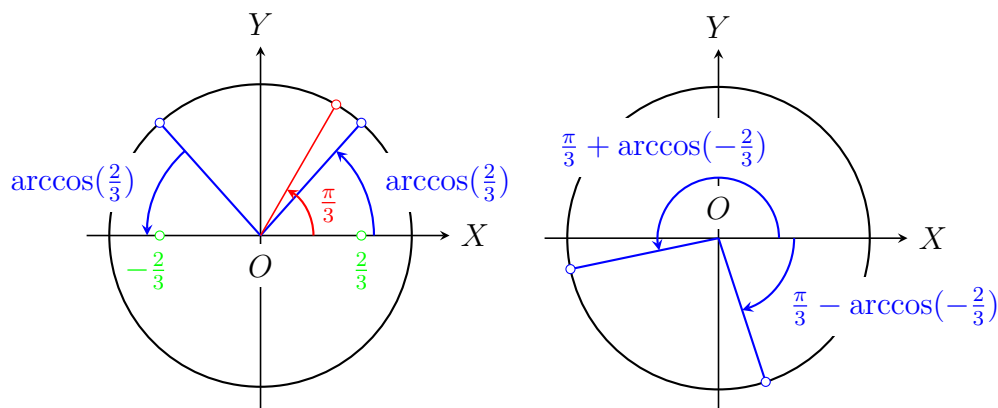
– On vérifie sur le cercle trigonométrique que

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad \forall 0 \leq a \leq 1.$$

– D'autre part, en comparant les cosinus des angles $\frac{\pi}{3}$ et $\arccos(\frac{2}{3})$, on en déduit une comparaison de ces angles :

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} > \arccos\left(\frac{2}{3}\right).$$

Des deux remarques précédentes, on conclut que $\frac{\pi}{3} + \arccos(-\frac{2}{3}) > \pi$.



• Résolution sur l'intervalle $[\pi, 3\pi]$

Sur l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, l'équation $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{2}{3}$ admet deux solutions

- l'une est engendrée par $\frac{\pi}{3} + \arccos(-\frac{2}{3}) + 2k\pi$ avec $k = 0$,
- l'autre est engendrée par $\frac{\pi}{3} - \arccos(-\frac{2}{3}) + 2k\pi$ avec $k = 1$.

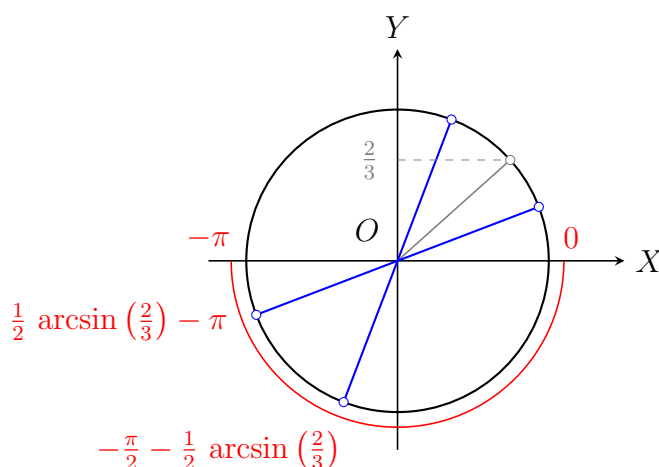
$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \arccos(-\frac{2}{3}), \frac{7\pi}{3} - \arccos(-\frac{2}{3}) \right\},$$

$$\text{ou} \quad S = \left\{ \frac{4\pi}{3} - \arccos(\frac{2}{3}), \frac{4\pi}{3} + \arccos(\frac{2}{3}) \right\}.$$

c) Résolution de l'équation $\sin(2x) = \frac{2}{3}$ sur l'intervalle $[-\pi, 0]$.

• Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin(2x) = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



• Résolution sur l'intervalle $[-\pi, 0]$

Sur l'intervalle $[-\pi, 0]$, l'équation $\sin(2x) = \frac{2}{3}$ admet deux solutions

- l'une est engendrée par $\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\pi$ avec $k = -1$,
- l'autre est engendrée par $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\pi$ avec $k = -1$.

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) - \pi, -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \right\}.$$

d) Résolution de l'équation $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$ sur l'intervalle $[\pi, 3\pi]$.

• Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 4k\pi \\ \text{ou} \\ x = -2 \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 4k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Résolution sur l'intervalle $[\pi, 3\pi]$

Sur l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, l'équation $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$ n'admet pas de solution.

- Pour $k = 0$, les deux solutions sont inférieures à π .

En effet $0 < \arccos(\frac{1}{3}) < \frac{\pi}{2}$, d'où

$$0 < 2 \arccos(\frac{1}{3}) < \pi \quad \text{et} \quad -\pi < -2 \arccos(\frac{1}{3}) < 0.$$

- Pour $k = 1$, les deux solutions sont supérieures à 3π . En effet :

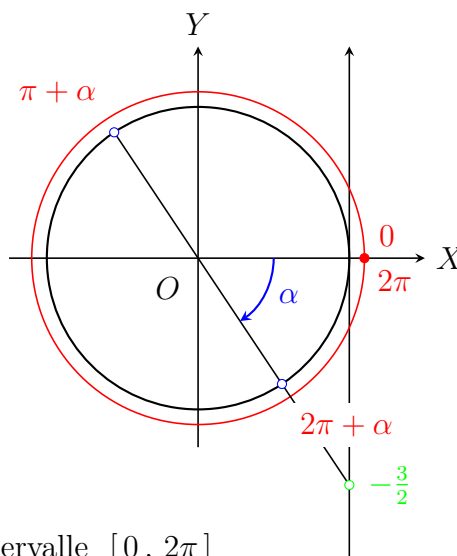
$$4\pi < 2 \arccos(\frac{1}{3}) + 4\pi < 5\pi \quad \text{et} \quad 3\pi < -2 \arccos(\frac{1}{3}) + 4\pi < 4\pi.$$

$$S = \emptyset.$$

e) Résolution de l'équation $\tan x = -\frac{3}{2}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\tan x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \arctan(-\frac{3}{2}) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



- Résolution sur l'intervalle $[0, 2\pi]$

Soit $\alpha = \arctan(-\frac{3}{2})$.

Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, l'équation $\tan x = -\frac{3}{2}$ admet deux solutions :
 $x = \pi + \alpha$ et $x = 2\pi + \alpha$.

$$S = \left\{ \pi + \arctan\left(-\frac{3}{2}\right), 2\pi + \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) \right\}.$$

f) Résolution de l'équation $\cot(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{3}{2}$ sur l'intervalle $] \pi, 3\pi[$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cot(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Remarques :

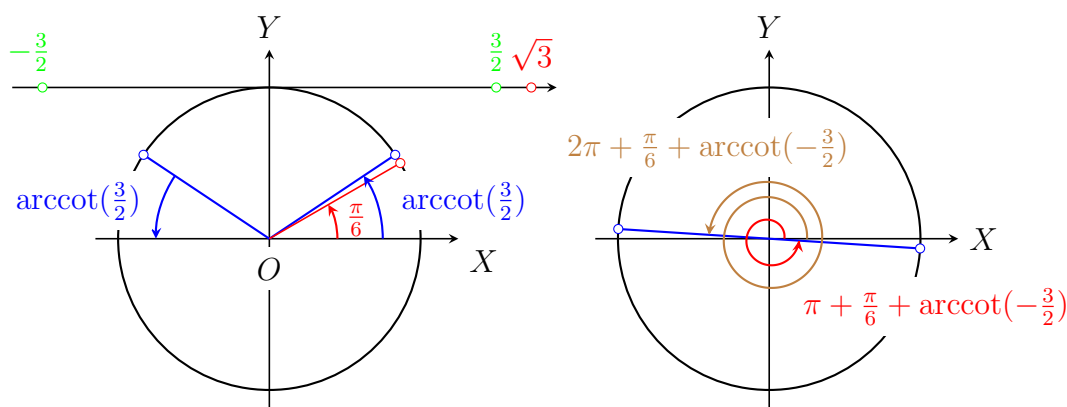
- On vérifie sur le cercle trigonométrique que

$$\pi - \operatorname{arccot}(-a) = \operatorname{arccot} a, \quad \forall a \geq 0.$$

- D'autre part, en comparant les cotangentes des angles $\frac{\pi}{6}$ et $\operatorname{arccot}(\frac{3}{2})$, on en déduit une comparaison de ces angles :

$$\sqrt{3} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \operatorname{arccot}(\frac{3}{2}).$$

Des deux remarques précédentes, on conclut que $\frac{\pi}{6} + \operatorname{arccot}(-\frac{3}{2}) < \pi$.



- Résolution sur l'intervalle $] \pi, 3\pi [$

Sur l'intervalle $] \pi, 3\pi [$, l'équation $\cot(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2}$ admet deux solutions

- l'une est très proche de 2π : $x = \pi + \frac{\pi}{6} + \operatorname{arccot}(-\frac{3}{2})$,
- l'autre est très proche de 3π : $x = 2\pi + \frac{\pi}{6} + \operatorname{arccot}(-\frac{3}{2})$.

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{6} + \operatorname{arccot}(-\frac{3}{2}), \frac{13\pi}{6} + \operatorname{arccot}(-\frac{3}{2}) \right\}.$$

g) Résolution de l'équation $\tan(2x) = 2$ sur l'intervalle $] -\pi, 0 [$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\tan(2x) = 2 \Leftrightarrow 2x = \arctan(2) + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \arctan(2) + k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Résolution sur l'intervalle $] -\pi, 0 [$

Sur l'intervalle $] -\pi, 0 [$, l'équation $\tan(2x) = 2$ admet deux solutions qui correspondent à $\frac{1}{2} \cdot \arctan(2) + k \frac{\pi}{2}$ avec $k = -2$ et $k = -1$.

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \arctan(2) - \pi, \frac{1}{2} \cdot \arctan(2) - \frac{\pi}{2} \right\}.$$

h) Résolution de l'équation $\cot(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$ sur l'intervalle $] \pi, 3\pi[$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cot(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi \\ &\Leftrightarrow x = 2 \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- Résolution sur l'intervalle $] \pi, 3\pi[$

Sur l'intervalle $] \pi, 3\pi[$, l'équation $\cot(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$ admet une seule solution.

$$S = \left\{ 2 \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi \right\}.$$

5. Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle donné :

a) $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$, $x \in [0, 2\pi]$, c) $\tan(2x) \geq 2$, $-\pi \leq x \leq 0$.

b) $\cot x \geq -\frac{1}{2}$, $-\frac{3\pi}{2} \leq x < 0$,

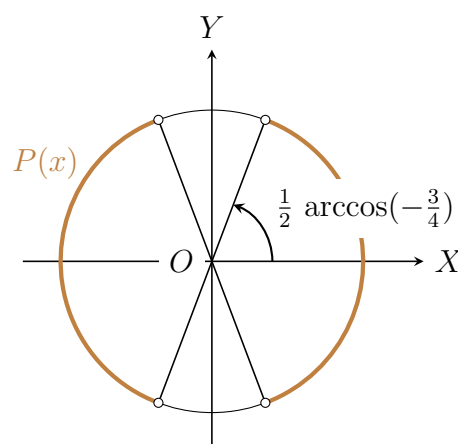
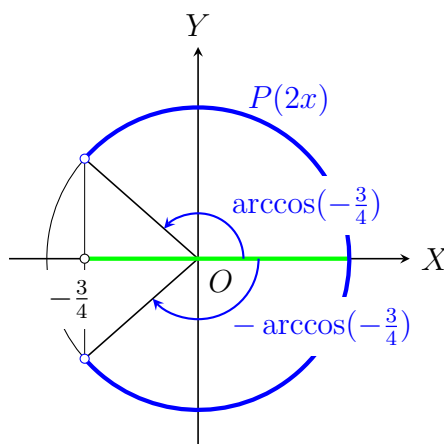
a) Résolution de l'inéquation $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$

- Représentation des points $P(2x)$ tels que $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$.

On représente, sur l'axe des cosinus, les valeurs plus grandes que $-\frac{3}{4}$.

Puis on représente les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est plus grande que $-\frac{3}{4}$.

$$\cos(2x) > -\frac{3}{4} \Leftrightarrow -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2k\pi < 2x < \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

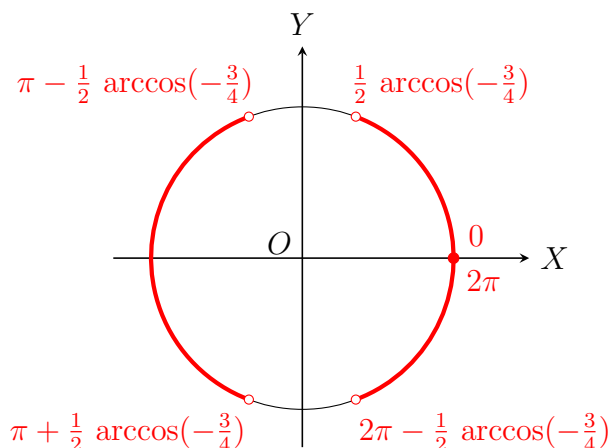


- On en déduit les points $P(x)$ solution de l'inéquation $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned}-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2k\pi &< 2x < \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2k\pi \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + k\pi &< x < \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} S &= [0, \frac{1}{2} \arccos(-\frac{3}{4})[\\ &\cup]\pi - \frac{1}{2} \arccos(-\frac{3}{4}), \pi + \frac{1}{2} \arccos(-\frac{3}{4})[\\ &\cup]2\pi - \frac{1}{2} \arccos(-\frac{3}{4}), 2\pi]. \end{aligned}$$

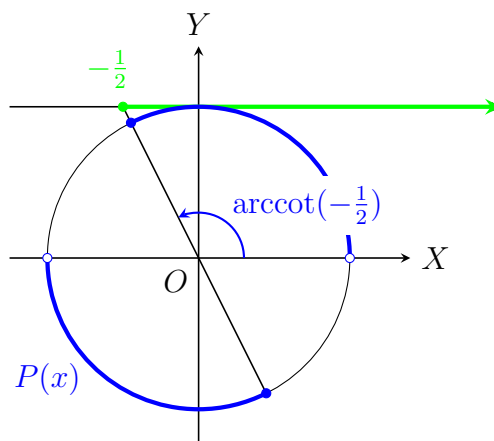


b) Résolution de l'inéquation $\cot x \geq -\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[-\frac{3\pi}{2}, 0[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que $\cot x \geq -\frac{1}{2}$.

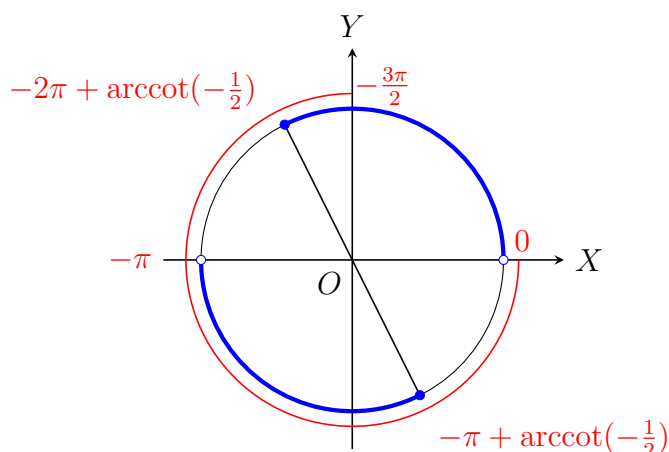
On représente, sur l'axe des cotangentes, les valeurs plus grandes que $-\frac{1}{2}$. Puis on représente les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

$$\cot x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k\pi < x \leq \operatorname{arccot}(-\frac{1}{2}) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



- Graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\frac{3\pi}{2}, 0[$:

$$S = [-\frac{3\pi}{2}, -2\pi + \operatorname{arccot}(-\frac{1}{2})] \cup]-\pi, -\pi + \operatorname{arccot}(-\frac{1}{2})].$$



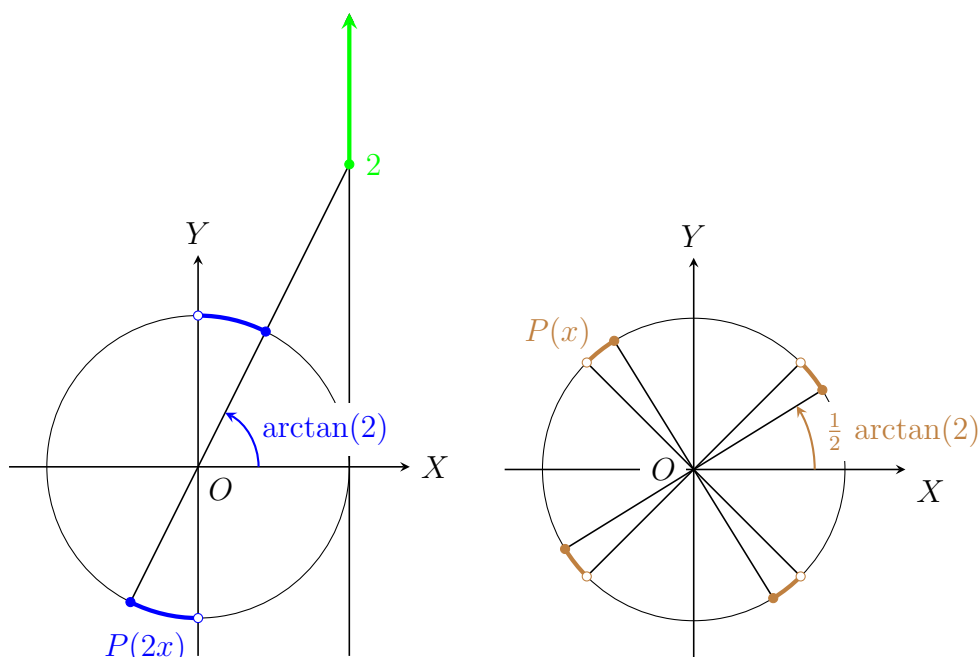
c) Résolution de l'inéquation $\tan(2x) \geq 2$ sur l'intervalle $[-\pi, 0]$

- Représentation des points $P(2x)$ tels que $\tan(2x) \geq 2$.

On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus grandes que 2.

Puis on représente les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

$$\tan(2x) \geq 2 \Leftrightarrow \arctan(2) + k\pi \leq 2x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



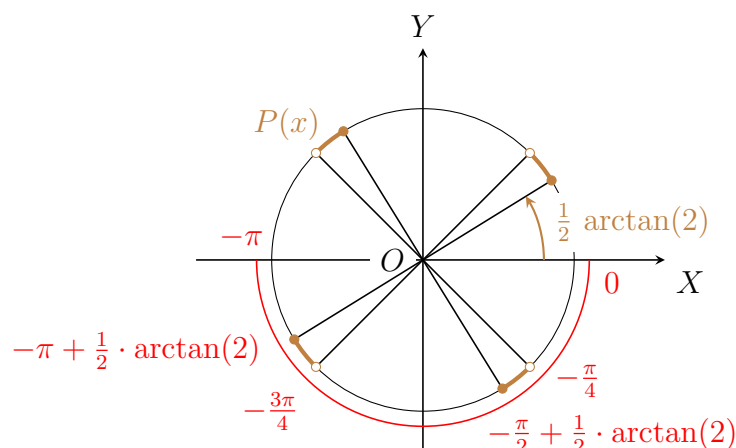
- On en déduit les points $P(x)$ solution de l'inéquation $\tan(2x) \geq 2$.

$$\arctan(2) + k\pi \leq 2x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \arctan(2) + k \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, 0]$:

$$S = [-\pi + \frac{1}{2} \cdot \arctan(2), -\frac{3\pi}{4}[\cup [-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(2), -\frac{\pi}{4}[.$$



6. Exprimer la somme S suivante à l'aide d'une seule valeur de la fonction $\arctan x$.

$$S = \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan 7 + \arctan 8$$

Indication : commencer par calculer $\arctan 2 + \arctan 3$, puis $\arctan 7 + \arctan 8$.

a) Soient $\alpha = \arctan 2$ et $\beta = \arctan 3$.

Pour pouvoir exprimer $\alpha + \beta$ à l'aide d'une seule fonction Arctangente, on localise cet angle, puis on calcule sa tangente.

- $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \alpha + \beta \in [0, \pi[$.
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1$.

$$\text{D'où } \alpha + \beta = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

b) Soient $\gamma = \arctan 7$ et $\delta = \arctan 8$.

De même, on localise l'angle $\gamma + \delta$, puis on calcule sa tangente.

- $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\delta \in [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \gamma + \delta \in [0, \pi[$.
- $\tan(\gamma + \delta) = \frac{\tan \gamma + \tan \delta}{1 - \tan \gamma \tan \delta} = \frac{7 + 8}{1 - 7 \cdot 8} = -\frac{3}{11}$.

$$\text{D'où } \gamma + \delta = \arctan\left(-\frac{3}{11}\right) + \pi = \pi - \arctan \frac{3}{11}.$$

A ce stade, le contrat est rempli :

$$S = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = \frac{3\pi}{4} + \pi - \arctan \frac{3}{11} = \frac{7\pi}{4} - \arctan \frac{3}{11}.$$

c) Mais on peut réitérer encore une fois le procédé : on localise l'angle S puis on calcule sa tangente.

- $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ et $\gamma + \delta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\Rightarrow S \in]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[.$

$$\bullet \tan S = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\gamma + \delta)}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan(\gamma + \delta)} = \frac{-1 + (-\frac{3}{11})}{1 - (-1) \cdot (-\frac{3}{11})} = -\frac{7}{4}.$$

D'où $S = \arctan(-\frac{7}{4}) + 2\pi = 2\pi - \arctan \frac{7}{4}$.

7. Déterminer le domaine de définition des expressions suivantes :

a) $a(x) = \arccos(\sqrt{x})$

c) $c(x) = \arcsin(\tan x)$

b) $b(x) = \tan(\arcsin x)$

d) $d(x) = \tan(2 \arccos x)$

a) $a(x) = \arccos(\sqrt{x})$.

$$D_a = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ et } -1 \leq \sqrt{x} \leq 1\} .$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$D_q = [0, 1].$$

b) $b(x) = \tan(\arcsin x)$.

$$D_b = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } \arcsin x \neq \pm \frac{\pi}{2} \right\}.$$

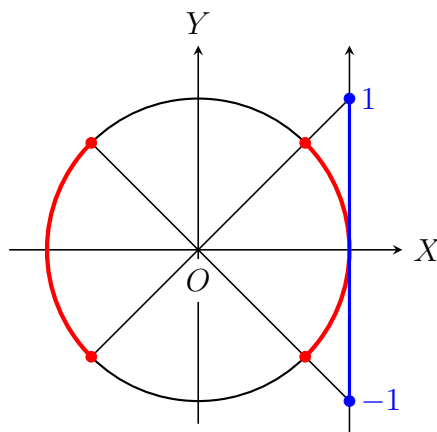
$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \begin{cases} \arcsin x = -\frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow x = -1, \\ \arcsin x = +\frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow x = +1. \end{cases}$$

$$D_b = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) $c(x) = \arcsin(\tan x)$.

$$D_c = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad -1 \leq \tan x \leq 1 \right\}.$$

$$D_c = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right].$$



d) $d(x) = \tan(2 \arccos x)$.

$$D_d = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } 2 \arccos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2 \arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \arccos x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arccos x = \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \arccos x = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$D_d = [-1, 1] \setminus \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

