Corrigé 7

1. Résoudre les triangles ABC dans les trois cas suivants :

a) $a = 4\,,\ b = 7$ et $c = 10\,,$

b) $a = 12\,,\ b = 18$ et $\gamma = 53°\,,$

c) $a = 5\,,\ \beta = 114°$ et $\gamma = 31°\,.$

---

a) On commence par déterminer l'angle le plus grand, c'est le seul qui peut être obtus. L'angle le plus grand est celui qui est opposé au coté le plus grand, c'est donc l'angle γ.

- Mesure de l'angle le plus grand à l'aide du théorème du cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,a\,b} = -\frac{5}{8}\,.$$

Le cosinus est négatif, l'angle γ est donc obtus : $\gamma \approx 128,7\,°$.

On détermine ensuite l'angle α ou β à l'aide du théorème du sinus ou celui du cosinus. Et on conclut en utilisant la relation $\alpha + \beta + \gamma = 180\,°$.

- Mesure de l'angle β
  - A l'aide du théorème du cosinus

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c}\,,$$

$$\cos\beta = \frac{4^2+10^2-7^2}{2\cdot 4\cdot 10} = \frac{67}{80} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 33,1\,°.$$

  - A l'aide du théorème du sinus

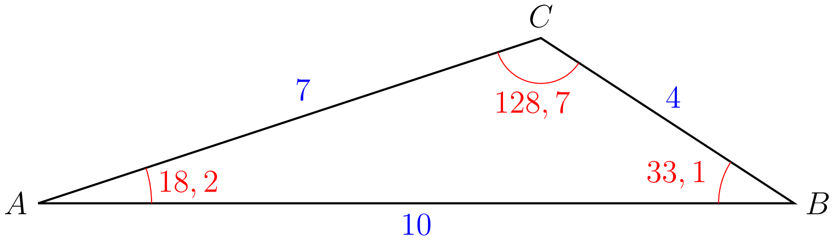
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta = \frac{b}{c}\,\sin\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta = \frac{b}{c}\,\sqrt{1-\cos^2\gamma}\,,$$

$$\sin\beta = \frac{7}{10}\,\sqrt{1-\left(-\tfrac{5}{8}\right)^2} = \frac{7\sqrt{39}}{80} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 33,1\,°,$$

car l'angle γ étant obtus, on en déduit que l'angle β est aigu.

- Mesure de l'angle α

$$\alpha + \beta + \gamma = 180\,° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 180\,° - (\beta + \gamma)\,, \qquad \alpha \approx 18,2\,°.$$



b) Ne connaissant aucun des trois couples $(a\,,\,\alpha)$, $(b\,,\,\beta)$ ou $(c\,,\,\gamma)$, on ne peut pas utiliser le théorème du sinus.

- On commence par déterminer la mesure du côté c à l'aide du théorème du cosinus.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma\,, \qquad c^2 \approx 208\,, \qquad c \approx 14,4\,.$$

- L'angle β est le plus grand des trois angles. Comment déterminer sa mesure ?

  - A l'aide du théorème du sinus

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta = \frac{b}{c}\,\sin\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta \approx 0,99672\,,$$

$$\sin\beta \approx 0,99672 \quad \text{et} \quad 0^\circ \le \beta \le 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 85,4^\circ \quad \text{ou} \quad \beta \approx 94,6^\circ,$$

    mais on ne sait pas si l'angle β est aigu ou obtus ! On ne peux donc pas conclure. Il faut utiliser le théorème du cosinus.

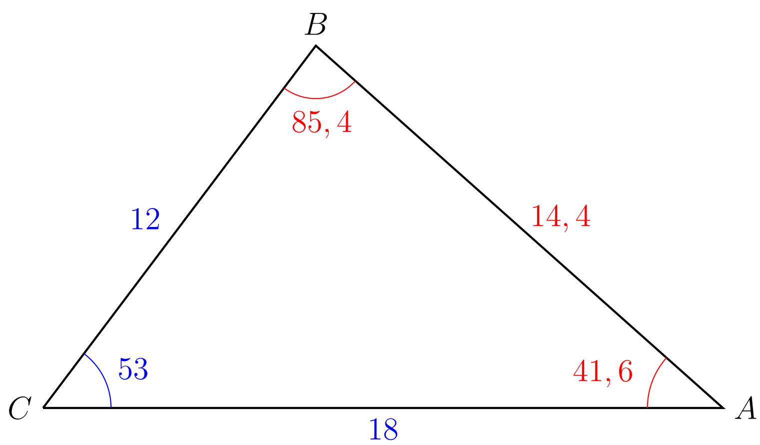
  - A l'aide du théorème du cosinus

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}\,,$$

$$\cos\beta \approx 0,081 \ge 0 \quad \text{et} \quad 0^\circ \le \beta \le 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 85,4^\circ.$$

- Mesure de l'angle α

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)\,, \qquad \alpha \approx 41,6^\circ.$$



c) Connaissant deux angles, on en déduit immédiatement le troisième.

- Mesure de l'angle α

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)\,, \qquad \alpha = 35^\circ.$$

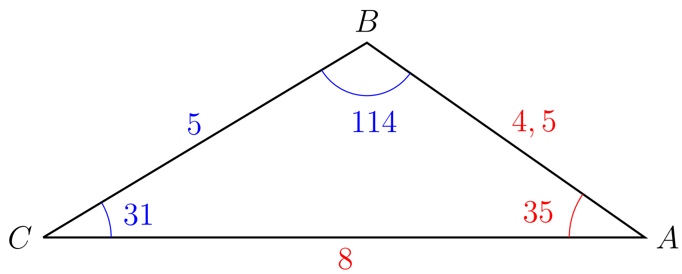
Connaissant un côté, on en déduit les deux autres à l'aide du théorème du sinus.

- Mesure du côté b à l'aide du théorème du sinus

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad b=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,a\,, \qquad b\approx 8\,.$$

- Mesure du côté c à l'aide du théorème du sinus

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad c=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\,a\,, \qquad c\approx 4,5\,.$$



2. D'un triangle ABC, on ne connaît que les côtés a, c et l'angle α :
$a=7$, $c=10$ et $\alpha=30°$.

a) Résoudre le triangle (la solution est-elle unique ?)

b) Construire la (les) solution(s).

Il s'agit de vérifier par le calcul et par le dessin, que le triangle ABC est mal défini par la donnée de deux côtés et d'un autre angle que celui défini par les deux côtés.

a) Par le calcul

Première méthode

Ne connaissant pas l'angle β formé par les côtés a et c, il n'est pas agréable d'utiliser le théorème du cosinus.

On utilise le théorème du sinus pour déterminer $\sin\gamma$:

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad \sin\gamma=\frac{c}{a}\,\sin\alpha\,, \qquad \sin\gamma=\frac{5}{7}\,,$$

ce qui donne pour γ deux solutions qui correspondent à des angles supplémentaires.

1) $\gamma_1\approx 45,6\,°$, $\quad \beta_1=180\,°-(\alpha+\gamma)\approx 104,4\,°$, $\quad b_1=a\,\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\alpha}\approx 13,6\,.$

2) $\gamma_2\approx 134,4\,°$, $\quad \beta_2=180\,°-(\alpha+\gamma)\approx 15,6\,°$, $\quad b_2=a\,\dfrac{\sin\beta_2}{\sin\alpha}\approx 3,8\,.$

Deuxième méthode

En utilisant le théorème du cosinus pour déterminer b, on obtient une équation du deuxième degré qui nous donne deux solutions.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha + c^2 - a^2 = 0\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 - 10\sqrt{3}\,b + 51 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt{3}\left(5 \pm 2\sqrt{2}\right).$$

Ces deux valeurs de b correspondent aux deux solutions suivantes :

1) ∘ $b_1 = \sqrt{3}\,\left(5 + 2\sqrt{2}\right) \approx 13,6\,,$

∘ $\cos\beta_1 = \dfrac{a^2 + c^2 - b_1^2}{2\,a\,c} = \dfrac{5 - 6\sqrt{2}}{14} \approx -0,25\,,\qquad \beta_1 \approx 104,4\,°,$

∘ $\alpha + \beta_1 + \gamma_1 = 180\,° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_1 = 180\,° - (\alpha + \beta_1)\,,\qquad \gamma_1 \approx 45,6\,°.$

2) ∘ $b_2 = \sqrt{3}\,\left(5 - 2\sqrt{2}\right) \approx 3,8\,,$

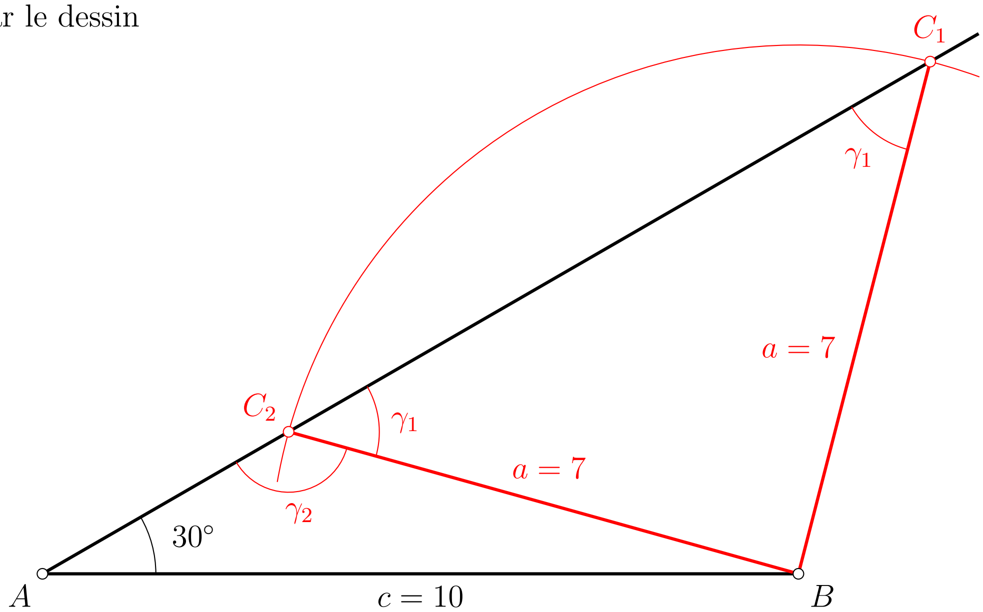
∘ $\cos\beta_2 = \dfrac{a^2 + c^2 - b_2^2}{2\,a\,c} = \dfrac{5 + 6\sqrt{2}}{14} \approx 0,96\,,\qquad \beta_2 \approx 15,6\,°,$

∘ $\alpha + \beta_2 + \gamma_2 = 180\,° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_2 = 180\,° - (\alpha + \beta_2)\,,\qquad \gamma_2 \approx 134,4\,°.$

Remarque : cette méthode est longue est fastidieuse, de plus elle ne fait pas apparaître le fait que les deux solutions γ_1 et γ_2 sont des angles supplémentaires.

Cette méthode est déconseillée.

b) Par le dessin



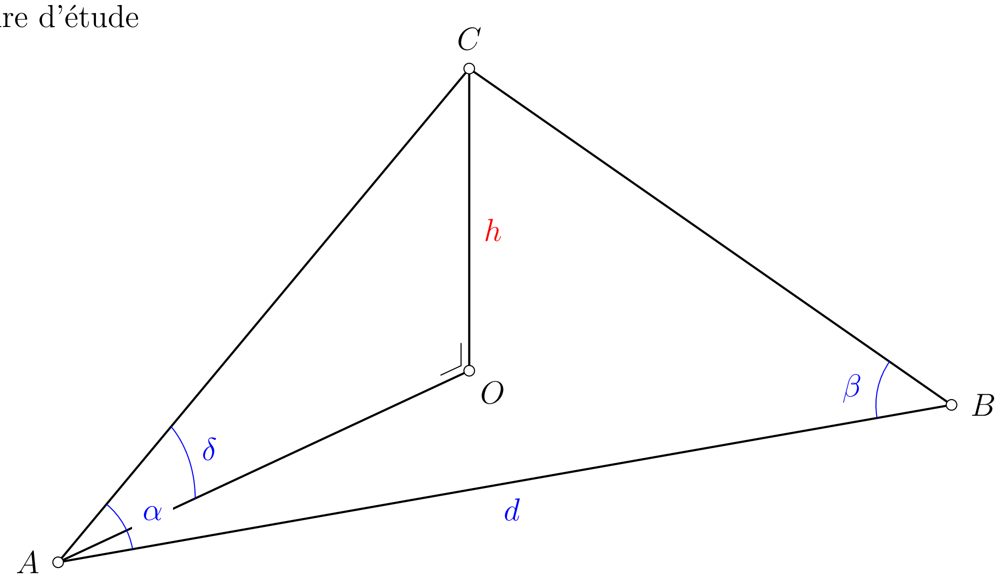
3. Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on fait le choix de deux points A et B distants de d mètres.

On mesure les angles $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et l'angle d'élévation δ sous lequel on voit C depuis A.

Sachant que A est au bord de la mer, calculer l'altitude de C.

Application numérique : $d = 1000\,\mathrm{m}$, $\alpha = 50°$, $\beta = 115°$ et $\delta = 35°$.

Figure d'étude



Le point O est situé au niveau de la mer, à la verticale du sommet C.

Or le point A est au bord de la mer, donc le triangle AOC est rectangle en O.

Connaissant α, β et d, le triangle ABC est totalement défini, on peut donc calculer AC.

Soit γ l'angle $\widehat{ACB}$, $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ et $\sin\gamma = \sin[\pi - (\alpha+\beta)] = \sin(\alpha+\beta)$.

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{d}{\sin\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad AC = d \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \qquad AC = d \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

On en déduit l'altitude $h = OC$ du sommet C.

Dans le triangle rectangle AOC, on a : $\sin\delta = \dfrac{h}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad h = AC \cdot \sin\delta$.

D'où : $h = d\,\dfrac{\sin\beta \cdot \sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Application numérique : $h \approx 2'008\,\mathrm{m}$.

4. Résoudre le triangle ABC dont on connaît : $\sigma = b + c$, β et γ.

Indication : exprimer σ en fonction de a et des trois angles.

Connaissant β et γ, on en déduit α : $\alpha = \pi - (\beta+\gamma)$, et $\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma)$.

Pour obtenir a en fonction des données, commençons par évaluer $\sigma = b + c$ en fonction de a et des trois angles.

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \qquad \text{et} \qquad \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

On en déduit σ en fonction de a et des angles, puis on "retourne" la relation :

$$\sigma = b + c = a \cdot \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sigma \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta + \sin\gamma}, \qquad a = \sigma \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta + \sin\gamma}.$$

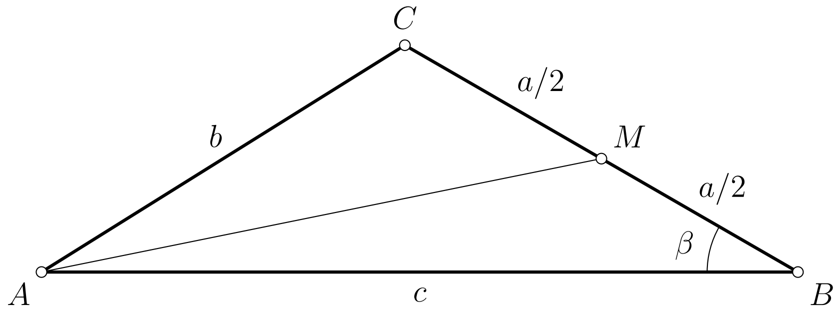
Il faut encore déterminer b et c en fonction des données.

$$* \ b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad b = \sigma \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta + \sin\gamma} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,, \qquad b = \sigma \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\beta + \sin\gamma}\,.$$

$$* \ c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad c = \sigma \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta + \sin\gamma} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\,, \qquad c = \sigma \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma}\,.$$

5. Soient ABC un triangle et M le point milieu du côté BC.
Déterminer la longueur de la médiane AM en fonction des côtés a, b et c.

Figure d'étude.



Dans le triangle ABM, on exprime la médiane AM à l'aide du théorème du cosinus :

$$AM^2 = \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 2\left(\tfrac{a}{2}\right) c \cdot \cos\beta\,, \qquad AM^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - a\,c \cdot \cos\beta\,.$$

Le problème est résolu si on est capable d'exprimer $\cos\beta$ en fonction des trois côtés a, b et c.
Et cela est possible en utilisant le théorème du cosinus dans le triangle ABC :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cdot \cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}\,.$$

On en déduit la médiane AM en fonction des trois côtés a, b et c :

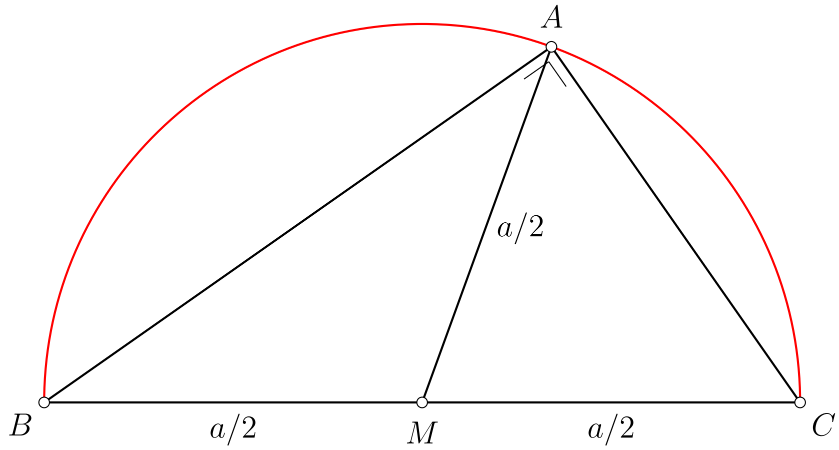
$$AM^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - a\,c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}\,, \qquad AM^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$$

$$AM^2 = \frac{2\,b^2 + 2\,c^2 - a^2}{4}\,, \qquad AM = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2}\,.$$

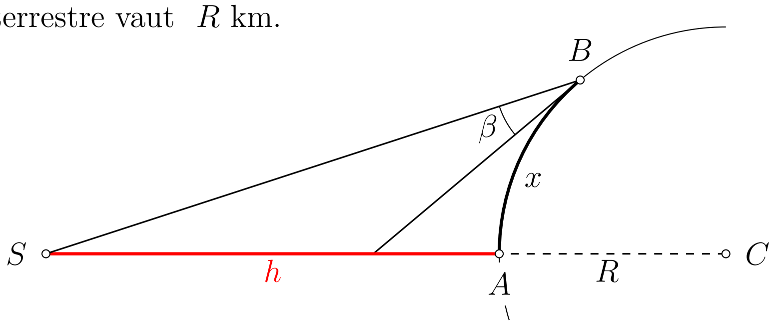
Cas particulier : si le triangle ABC est rectangle en A, alors on a

$$b^2 + c^2 = a^2 \qquad \text{et} \qquad AM = \frac{a}{2}\,.$$

Ce résultat justifie la notion de cercle de Thalès.

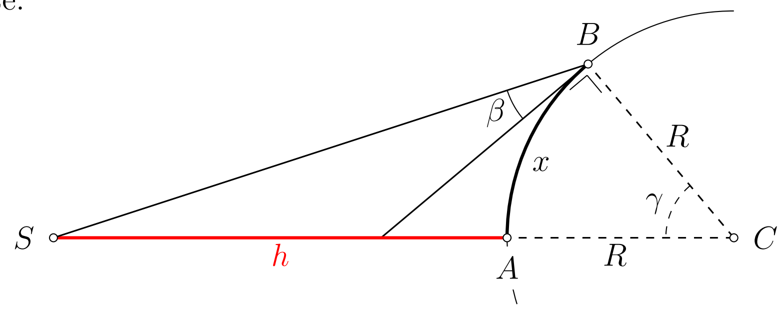


6. Soient A et B deux points situés sur le même méridien terrestre et S un satellite passant à la verticale de A. Déterminer l'altitude $AS = h$ sachant que depuis B on observe S sous un angle β, que l'arc AB est de longueur x km et que le rayon terrestre vaut R km.



La tangente au méridien en B est perpendiculaire au rayon.

Le triangle SBC est donc parfaitement déterminé, car on en connaît deux angles et un côté.



En effet, connaissant la longueur x de l'arc AB et le rayon R de la terre, on peut en déduire la mesure γ de l'arc AB en radian :

$$x = \gamma \cdot R \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{x}{R}.$$

L'angle $\widehat{SBC}$ vaut $\frac{\pi}{2} + \beta$, et on en déduit $\widehat{BSC} = \pi - (\gamma + \frac{\pi}{2} + \beta) = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma$.

Le triangle BSC est donc parfaitement défini, on connaît ses trois angles et un de ses côtés. On utilise alors le théorème du sinus pour déterminer SC :

$$\frac{R}{\sin(\widehat{BSC})} = \frac{SC}{\sin(\widehat{SBC})} \quad \Leftrightarrow \quad SC = R \cdot \frac{\sin(\widehat{SBC})}{\sin(\widehat{BSC})}$$

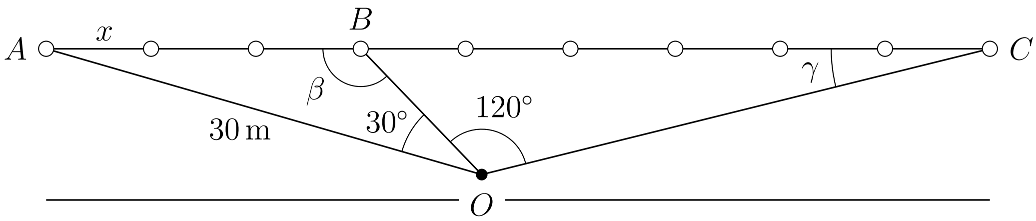
$$\Leftrightarrow \quad SC = R \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right)} \quad \Leftrightarrow \quad SC = R \cdot \frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta + \gamma)}\,.$$

Et on en déduit h :

$$h = SC - R = R \cdot \frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta + \gamma)} - R\,, \qquad h = R \cdot \left[\frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta + \frac{x}{R})} - 1 \right].$$

7. Dix réverbères, placés à intervalles égaux, se suivent sur toute la longueur d'un pont. Un passant situé à 30 mètres du premier réverbère voit la distance qui sépare celui-ci du quatrième, sous un angle de $30°$, et la distance qui sépare le quatrième du dernier réverbère, sous un angle de $120°$. Quelle est la longueur du pont ?

Figure d'étude :



On considère les deux triangles dont on connaît un côté, le côté OA, ce sont les triangles OAB et OAC.

En utilisant le théorème du sinus dans ces deux triangles, on obtient une relation entre le sinus des angles β et γ.

- dans le triangle OAB, on a

$$\frac{30}{\sin\beta} = \frac{3x}{\sin 30°} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = \frac{30}{\sin\beta} \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad \sin\beta = \frac{5}{x}\,,$$

- dans le triangle OAC, on a

$$\frac{30}{\sin\gamma} = \frac{9x}{\sin 150°} \quad \Leftrightarrow \quad 9x = \frac{30}{\sin\gamma} \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad \sin\gamma = \frac{5}{3\,x}\,.$$

On en déduit une relation entre $\sin\beta$ et $\sin\gamma$:

$$\sin\gamma = \frac{5}{3\,x} = \frac{1}{3} \cdot \sin\beta \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot \sin\gamma = \sin\beta\,.$$

La longueur du pont est égale à $9\,x$, le problème est donc résolu dès qu'on détermine $\sin\gamma$ ou $\sin\beta$.

Les deux angles β et γ sont liés. En effet dans le triangle OBC, on a

$$(180^\circ - \beta) + \gamma + 120^\circ = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \gamma + 120^\circ .$$

A partir des relations $3 \cdot \sin\gamma = \sin\beta$ et $\beta = \gamma + 120^\circ$, on cherche à obtenir $\sin\gamma$.

$$\begin{aligned}
3 \cdot \sin\gamma = \sin(\gamma + 120^\circ) \quad & \Leftrightarrow \quad 3 \cdot \sin\gamma = \sin\gamma \cdot \cos 120^\circ + \cos\gamma \cdot \sin 120^\circ \\
& \Leftrightarrow \quad 3 \cdot \sin\gamma = -\frac{1}{2} \cdot \sin\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\gamma \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{7}{2} \cdot \sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\gamma \\
& \Leftrightarrow \quad \tan\gamma = \frac{\sqrt{3}}{7} .
\end{aligned}$$

Or l'angle γ est aigu, donc $\sin\gamma = \dfrac{\tan\gamma}{\sqrt{1 + \tan^2\gamma}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

On en déduit la longueur du pont :

$$9x = \frac{30}{\sin\gamma} \cdot \frac{1}{2} = \frac{30}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}} \cdot \frac{1}{2} = 30 \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = 10 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{13} = 10\sqrt{39} \text{ m} .$$

Voici une autre solution.

On utilise le fait que dans les deux triangles OAB et OBC, les angles en B, $\widehat{ABO}$ et $\widehat{OBC}$ sont supplémentaires. Ils ont donc même sinus.

- En appliquant le théorème du sinus dans le triangle AOB, on obtient

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta = \frac{30 \cdot \sin 30^\circ}{3x} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta = \frac{5}{x} .$$

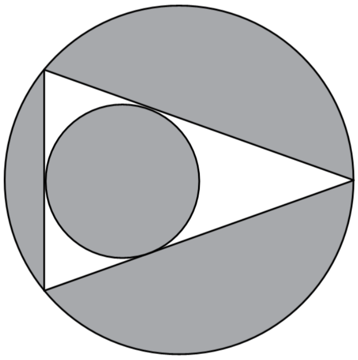
- En appliquant le théorème du sinus dans le triangle BOC, on en déduit la mesure de OC :

$$\frac{OC}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{BC}{\sin 120^\circ} \quad \Leftrightarrow \quad OC = \frac{6x}{\sin 120^\circ} \cdot \sin\beta = \frac{6x}{\sqrt{3}/2} \cdot \frac{5}{x} = 20\sqrt{3} .$$

- Et en appliquant le théorème du cosinus dans le triangle AOC, on en déduit la longueur du pont :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cdot \cos 150^\circ \\
&= (30)^2 + \left(20\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot (30) \cdot \left(20\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 900 + 1'200 + 2 \cdot 900 \\
&= 3'900 , \\
AC &= 10\sqrt{39} \text{ m} .
\end{aligned}$$

8. Trouver l'aire grisée dans l'image suivante en fonction des longueurs des côtés du triangle a, b et c, et du demi-périmètre $p = \frac{a+b+c}{2}$.



Soit R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, et S l'aire du triangle.
L'aire grisée est donnée par $\pi R^2 - S + \pi r^2$.
Par la formule de Héron, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
R est donné par

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

r est donné par

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}&\pi R^2 - S + \pi r^2\\ =&\pi\left[\frac{(abc)^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right] - \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.\end{aligned}$$
