

Corrigé 5

1. Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$

b) $\sin x + 2 \cos x = 9$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} [\sin(3x) + \cos(3x)] = 1$

d) $\sin(2x) - \cos(2x) + 1 = 0$, $-5\pi \leq x \leq -3\pi$

e) $\sin(\frac{x}{2}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0$, $-\pi \leq x \leq 0$

a) **On se ramène à une équation élémentaire en sinus**

Il s'agit de transformer l'équation $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ en une équation élémentaire de la forme

$$\sin(x + \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{c}.$$

- Normalisation

L'équation $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ est du type $a \sin x + b \cos x = p$, avec $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

On divise les deux membres de cette équation par ce coefficient de normalisation :

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

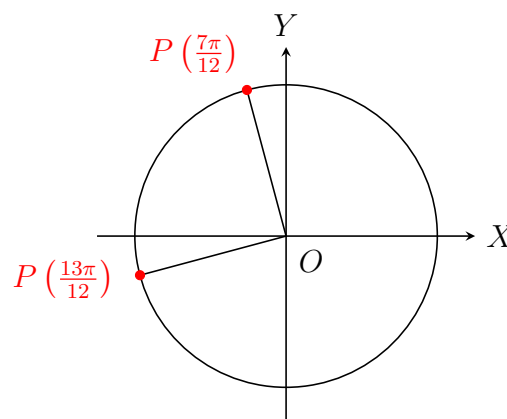
- Transformation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

- Résolution

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} &k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Ou bien on se ramène à une équation élémentaire en cosinus

Il s'agit de transformer l'équation $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ en une équation élémentaire de la forme

$$\cos(x + \varphi') = \frac{\sqrt{2}}{c}.$$

- Normalisation

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Transformation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

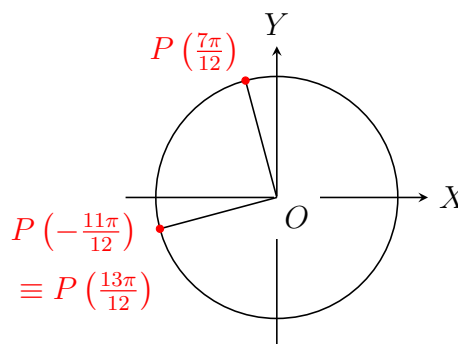
$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

- Résolution

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



$$S = \left\{ -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi, \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- b) • Normalisation

$$\sin x + 2 \cos x = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \sin x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos x = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

- Transformation

Il existe φ , tel que $\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sin x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos x = \frac{9}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin(\varphi) \sin x + \cos(\varphi) \cos x = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

- Résolution

L'équation $\cos(x - \varphi) = \frac{9}{\sqrt{5}}$ n'admet pas de solution car $\frac{9}{\sqrt{5}} > 1$.

(On aurait pu le constater dès l'étape de normalisation.)

c) L'équation linéaire est déjà normalisée.

- Transformation

- Transformation en cosinus

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} [\sin(3x) + \cos(3x)] &= 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(3x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(3x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{aligned}$$

- Transformation en sinus

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} [\sin(3x) + \cos(3x)] &= 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(3x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(3x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{aligned}$$

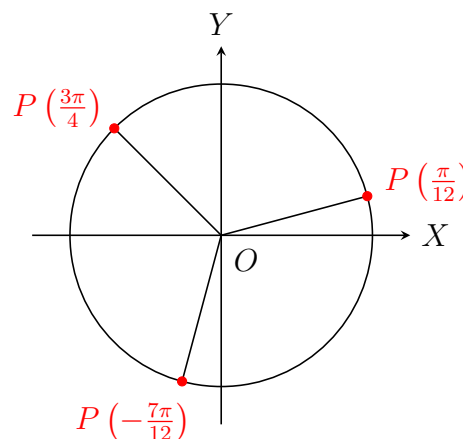
- Résolution

- Résolution de l'équation en cosinus

$$\begin{aligned} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} &= 2k\pi \\ \Leftrightarrow 3x &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Résolution de l'équation en sinus

$$\begin{aligned} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow 3x &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) • Normalisation

$$\sin(2x) - \cos(2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Transformation

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, & \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

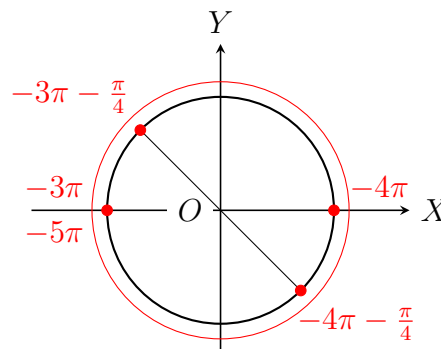
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, & \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Résolution sur l'intervalle $[-5\pi, -3\pi]$

$$x = -5\pi, \quad x = -4\pi - \frac{\pi}{4}, \quad x = -4\pi,$$

$$x = -3\pi - \frac{\pi}{4}, \quad x = -3\pi.$$

$$S = \left\{ -5\pi, -\frac{17\pi}{4}, -4\pi, -\frac{13\pi}{4}, -3\pi \right\}.$$



- e) L'équation $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ est une équation trigonométrique linéaire particulière car le terme constant est nul.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

- Première méthode de résolution

On utilise la technique de résolution des équations linéaires.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = k\pi \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Deuxième méthode de résolution

On se ramène à une équation élémentaire en tangente.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Remarque :

les x vérifiant $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ ne sont pas solutions : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm 1$.

o Troisième méthode de résolution

Les coefficients des termes en sinus et cosinus étant identiques ($a = b$), on peut se ramener à une équation élémentaire en sinus ou en cosinus.

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

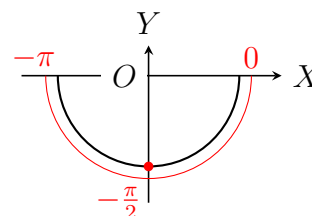
$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2k\pi, & \text{ou} \\ \frac{x}{2} = \pi - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

• Résolution sur l'intervalle $[-\pi, 0]$

Il n'y a qu'une solution, $S = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.



2. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\cos x + \sqrt{3} \sin x > 1$

b) $-\sqrt{3} \sin(2x) + \cos(2x) \leq -\sqrt{2}, \quad 5\pi \leq x \leq 6\pi$

c) $\sin x \geq \cos x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$

a) On résout les inéquations linéaires comme les équations linéaires.

On se ramène à une inéquation élémentaire en cosinus

• Normalisation

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x > \frac{1}{2}.$$

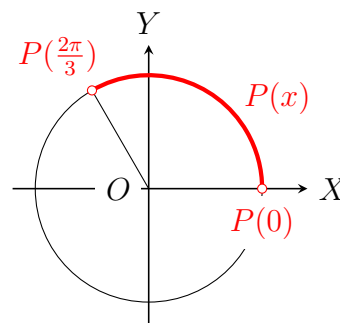
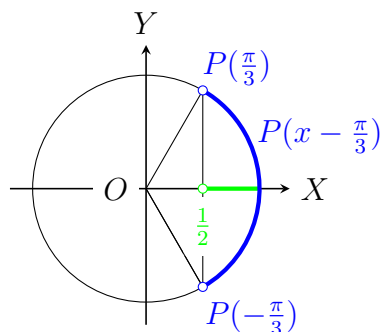
• Transformation

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}.$$

• Résolution

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



$$\Leftrightarrow 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}] 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi [.$$

Ou bien on se ramène à une inéquation élémentaire en sinus

- Normalisation

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x > \frac{1}{2}.$$

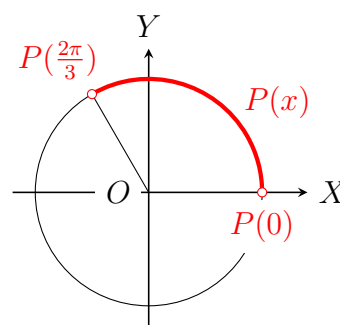
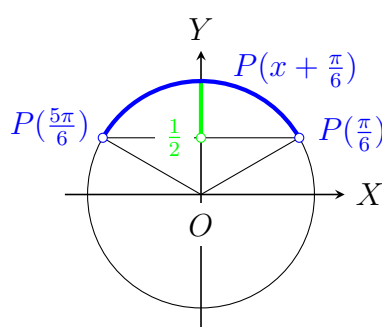
- Transformation

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}.$$

- Résolution

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



$$\Leftrightarrow 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}] 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi [.$$

b) On se ramène à une inéquation élémentaire en cosinus

- Normalisation

$$-\sqrt{3} \sin(2x) + \cos(2x) \leq -\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Transformation

$$\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

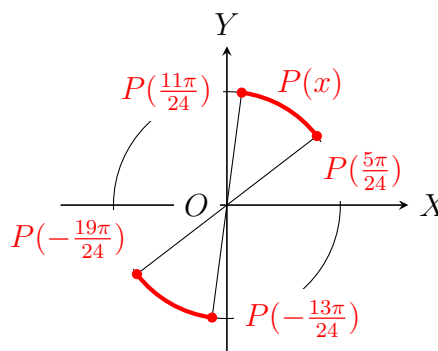
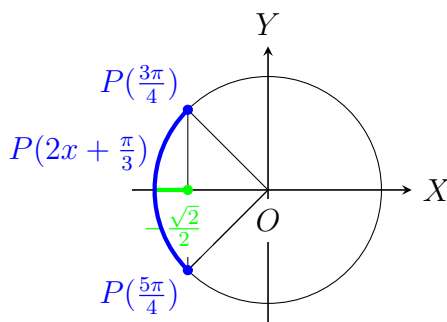
$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

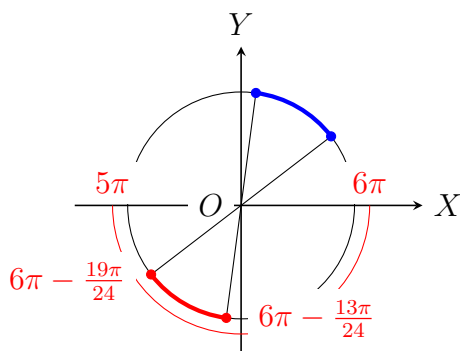
$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{24} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{24} + k\pi.$$



- Résolution sur l'intervalle $[5\pi, 6\pi]$

$$5\pi + \frac{5\pi}{24} \leq x \leq 5\pi + \frac{11\pi}{24}, \quad \text{ou} \quad 6\pi - \frac{19\pi}{24} \leq x \leq 6\pi - \frac{13\pi}{24}.$$



$$S = \left[\frac{125\pi}{24}, \frac{131\pi}{24} \right].$$

c) Sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, $\sin x$ et $\cos x$ sont de signes variables, il est difficile de se ramener à une inéquation élémentaire en tangente ou en cotangente. Il est préférable d'utiliser la technique de résolution des équations linéaires.

- Normalisation

$$\sin x \geq \cos x \Leftrightarrow \cos x - \sin x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \leq 0.$$

- Transformation

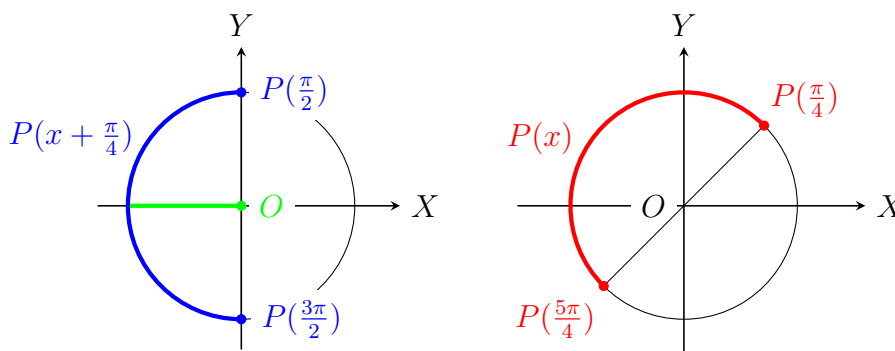
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \leq 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0.$$

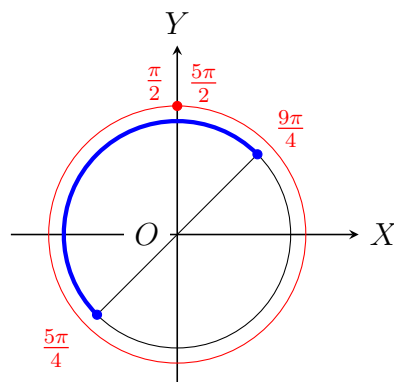
- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi.$$



- Résolution sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$



$$S = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right].$$

3. Factoriser avant de résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\sin(2x) - 2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

b) $\cos(2x) + \sin x + \cos x > 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

a) $\sin(2x) - 2\cos^2 x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - 2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x (\sin x - \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & \text{ou} \\ \sin x - \cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \\
& \bullet \sin x - \cos x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

$$\text{D'où } S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{b) } \cos(2x) + \sin x + \cos x > 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

$$\cos(2x) + \sin x + \cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + \sin x > 0$$

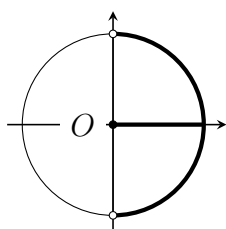
$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) + (\cos x + \sin x) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)[(\cos x - \sin x) + 1] > 0$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 & (i) \\ \text{et} \\ \cos x - \sin x + 1 > 0 & (ii) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \cos x + \sin x < 0 & (iii) \\ \text{et} \\ \cos x - \sin x + 1 < 0 & (iv) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$(i) \cos x + \sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$



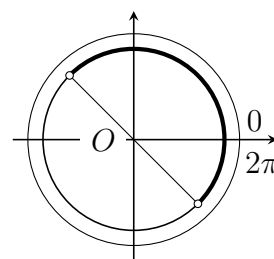
Résolution sur $\mathbb{R}$:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

Résolution sur $[0, 2\pi]$:

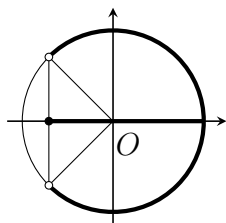
$$S_i = \left[0, \frac{3\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right].$$



$$(iii) \text{ On en déduit l'ensemble solution de } \cos x + \sin x < 0 : S_{iii} = \left] \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right[.$$

$$(ii) \cos x - \sin x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



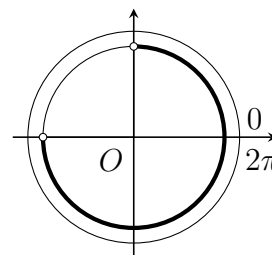
Résolution sur $\mathbb{R}$:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$-\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

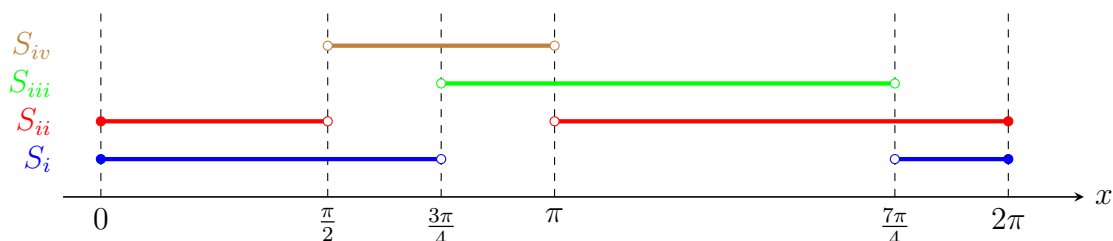
Résolution sur $[0, 2\pi]$:

$$S_{ii} = [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\pi, 2\pi].$$



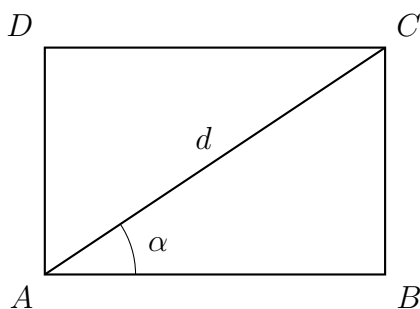
(iv) On en déduit l'ensemble solution de $\cos x - \sin x + 1 < 0$: $S_{iv} =]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Et pour finir :



$$S = (S_i \cap S_{ii}) \cup (S_{iii} \cap S_{iv}) = [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{4}, \pi[\cup]\frac{7\pi}{4}, 2\pi].$$

4. D'un rectangle $ABCD$ on connaît la longueur d de la diagonale AC , et on fait varier l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$.



- a) Pour quelles valeurs de l'angle α le périmètre P de ce rectangle satisfait-il la relation : $P \geq d\sqrt{6}$?

- b) Pour quelle valeur de l'angle α le périmètre est-il maximal ?

Que vaut-il ?

- a) Expression du périmètre P en fonction de d et de α :

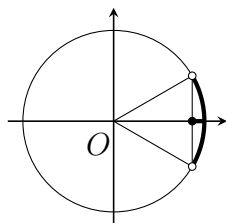
$$P = 2(AB + BC) \quad \text{avec} \quad AB = d \cos \alpha \quad \text{et} \quad BC = d \sin \alpha, \quad \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

$$P = 2d(\cos \alpha + \sin \alpha), \quad \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Résolution de l'inéquation :

$$P \geq d\sqrt{6} \Leftrightarrow 2d(\cos \alpha + \sin \alpha) \geq d\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$



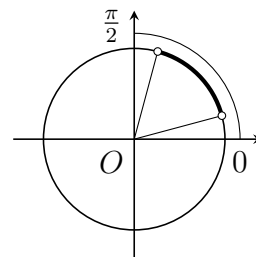
Résolution sur $\mathbb{R}$:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \alpha - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{12} + 2k\pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12} + 2k\pi.$$

Résolution sur $]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$S = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right].$$



- b) Pour déterminer la valeur de l'angle α pour laquelle le périmètre est maximum, on exprime P à l'aide d'une seule fonction sinus ou cosinus :

$$P = 2d(\cos \alpha + \sin \alpha) = 2d\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) = 2d\sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Le périmètre P est maximum lorsque $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Or $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Et le périmètre vaut alors $P = 2d\sqrt{2}$.