Corrigé 4

1. Calculer sans machine les valeurs suivantes :

a) $\cos(\frac{7\pi}{12})$

b) $\sin(\frac{\pi}{12})$

c) $\tan(\frac{5\pi}{12})$

d) $\tan(\frac{\pi}{8})$

---

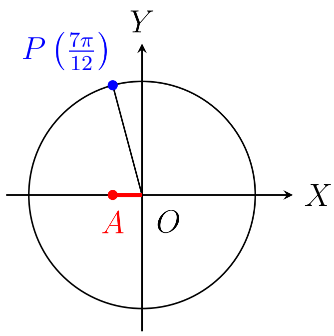
a) En utilisant les formules d'addition, on obtient un résultat de forme plus agréable qu'en utilisant les formules de bissection.

- Décomposition de $\frac{7\pi}{12}$ en une somme de deux valeurs remarquables

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{4\pi + 3\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

- Calcul de $A = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned} A &= \cos\left(\tfrac{7\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right). \end{aligned}$$

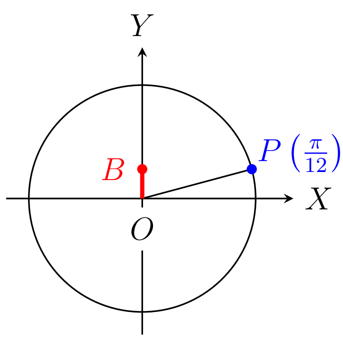


b) - Décomposition de $\frac{\pi}{12}$ en une différence de deux valeurs remarquables

$$\frac{\pi}{12} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

- Calcul de $B = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned} B &= \sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right). \end{aligned}$$



On constate que $B=-A$. On aurait pu le vérifier directement :

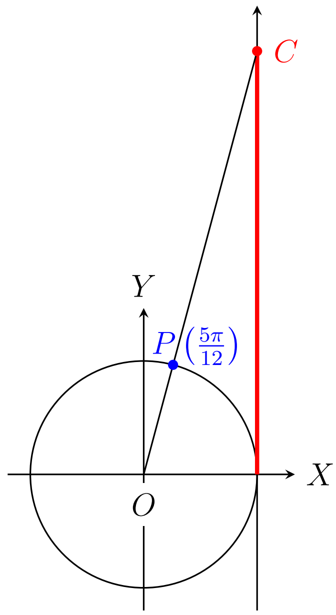
$$B=\sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\tfrac{7\pi}{12}-\tfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{7\pi}{12}\right)=-\cos\left(\tfrac{7\pi}{12}\right)=-A\,.$$

c) • Décomposition de $\frac{5\pi}{12}$ en une somme de deux valeurs remarquables

$$\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi+2\pi}{12}=\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\,.$$

• Calcul de $C=\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned}C&=\tan\left(\tfrac{5\pi}{12}\right)\\&=\tan\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{\tan(\frac{\pi}{4})+\tan(\frac{\pi}{6})}{1-\tan(\frac{\pi}{4})\,\tan(\frac{\pi}{6})}\\&=\frac{1+\frac{\sqrt3}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt3}{3}}\\&=\frac{3+\sqrt3}{3-\sqrt3}\\&=\frac{\left(3+\sqrt3\right)^2}{9-3}\\&=\frac{9+6\sqrt3+3}{6}\\&=2+\sqrt3\,.\end{aligned}$$

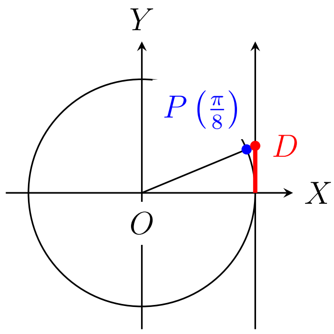


d) Ne pouvant pas décomposer $\frac{\pi}{8}$ en une somme ou une différence de deux valeurs remarquables, on utilise les formules de bissection.

$P\left(\frac{\pi}{8}\right)$ appartient au premier quadrant, donc $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est positif.

$$D=\tan\left(\tfrac{\pi}{8}\right)=\tan\left(\frac{\pi/4}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt2}{2}}{1+\frac{\sqrt2}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{2+\sqrt2}}\,.$$



Et en amplifiant, sous la racine, par le conjugué du dénominateur,

$$D=\sqrt{\frac{(2-\sqrt2)^2}{4-2}}=\frac{\left|2-\sqrt2\,\right|}{\sqrt2}=\frac{2-\sqrt2}{\sqrt2}=\sqrt2-1\,.$$

2. Calculer le sinus et le cosinus de l'angle $2x$ dans les deux cas suivants :

a) $\sin x = \pm\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ b) $\cot x = \pm 2\sqrt{2}$, $3\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$

---

a) $\sin x = \pm\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

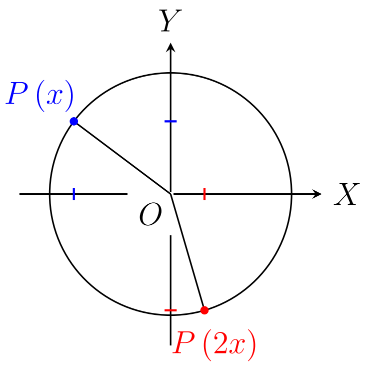
Pour calculer le sinus et le cosinus de l'angle $2x$ nous avons besoin de $\sin x$ et de $\cos x$.

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \quad \Rightarrow \quad P(x) \in II \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \geq 0 \quad$ et $\quad \cos x \leq 0$.

D'où $\quad \sin x = \frac{3}{5}$

et $\quad \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{4}{5}$.

- $\sin(2x) = 2\,\sin x\,\cos x = -\frac{24}{25}$,
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{7}{25}$.



b) $\cot x = \pm 2\sqrt{2}$, $3\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$.

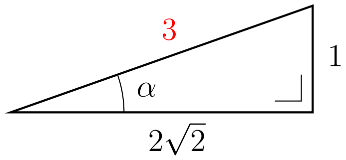
On détermine $\sin x$ et $\cos x$ en deux étapes.

- Signe de $\sin x$ et de $\cos x$.

  $3\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad P(x) \in III \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \leq 0 \quad$ et $\quad \cos x \leq 0$.

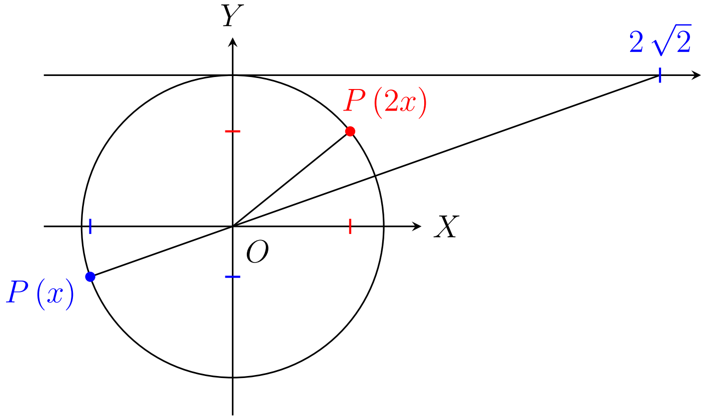
- Calcul de $|\sin x|$ et $|\cos x|$ à l'aide de l'angle géométrique aigu α défini par $\cot\alpha = 2\sqrt{2}$.

  $$\sin\alpha = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



En Conclusion : $\quad \sin x = -\dfrac{1}{3} \quad$ et $\quad \cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

D'où : $\quad \sin(2x) = 2\,\sin x\,\cos x = \dfrac{4\sqrt{2}}{9} \quad$ et $\quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{7}{9}$.



3. Calculer le sinus et le cosinus de l'angle $\frac{x}{2}$ dans les deux cas suivants :

a) $\cos x = \pm\frac{3}{5}$, $-\frac{7\pi}{2} < x < -3\pi$ b) $\tan x = -\frac{4}{3}$, $\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2}$

---

a) $\cos x = \pm\frac{3}{5}$, $-\frac{7\pi}{2} < x < -3\pi$.

Localisation de $P(x)$:

$-\frac{7\pi}{2} < x < -3\pi \quad \Rightarrow \quad P(x) \in II \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \leq 0\,,$ donc $\cos x = -\frac{3}{5}$.

Localisation de $P(\frac{x}{2})$:

$x \in \left]-\frac{7\pi}{2}\,,\,-3\pi\right[\quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \in \left]-\frac{7\pi}{4}\,,\,-\frac{3\pi}{2}\right[\quad \Rightarrow \quad P(\frac{x}{2}) \in I\,.$

D'où : $\sin\frac{x}{2} \geq 0$ et $\cos\frac{x}{2} \geq 0$.

Calcul de $\sin\frac{x}{2}$ et de $\cos\frac{x}{2}$:

$\sin\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $\cos\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) L'angle x est défini par $\tan x = -\frac{4}{3}$ et $\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2}$.

- Localisation de $P(x)$:

  $\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad P(x) \in I \cup IV \quad \Rightarrow \quad \cos x \geq 0\,.$

- Calcul de $\cos x$

  $$\tan x = -\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R}^* \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \sin x = -4\,\lambda \\ \cos x = 3\,\lambda \end{cases}$$

  On détermine le coefficient de proportionnalité λ à l'aide de Pythagore :

  $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (3\,\lambda)^2 + (-4\,\lambda)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 25\cdot\lambda^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{5}\,.$$

  $$\cos x \geq 0\,, \qquad \cos x = +\frac{3}{5}\,.$$

- Localisation de $P(\frac{x}{2})$:

  $\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{9\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad P(\frac{x}{2}) \in I \cup IV\,.$

  Cette localisation de $P(\frac{x}{2})$ est insuffisante pour déterminer le signe de $\sin\frac{x}{2}$ et de $\cos\frac{x}{2}$. On recommence en essayant d'être plus précis.

  $\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2}$ et $\tan x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7\pi}{2} < x < 4\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7\pi}{4} < \frac{x}{2} < 2\pi$

  $\Rightarrow \quad P(\frac{x}{2}) \in IV \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{x}{2} \leq 0$ et $\cos\frac{x}{2} \geq 0$.

- Calcul de $\sin\frac{x}{2}$ et de $\cos\frac{x}{2}$:

  - $\sin\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$,
  - $\cos\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. Si $\tan x = \frac{1}{3}$ et $\tan y = -\frac{1}{7}$, calculer sans machine, l'angle $\varphi = 2x - y$

a) sachant que x et y sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

b) sachant que x et y sont compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Pour déterminer la valeur exacte de l'angle $\varphi = 2x - y$, nous allons

- calculer une fonction trigonométrique de φ ,
- puis localiser $P(\varphi)$ sur le cercle trigonométrique de façon suffisamment précise pour en déduire la valeur de φ .

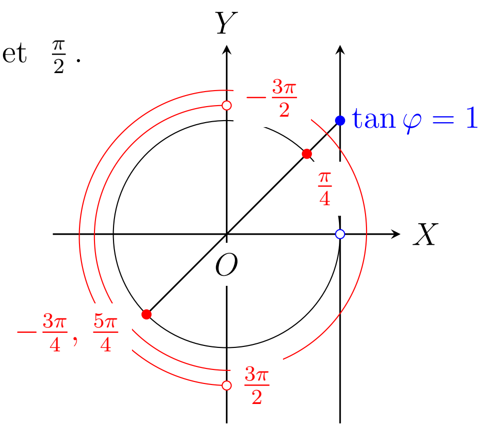
Connaissant $\tan x$ et $\tan y$, il est plus simple de calculer $\tan\varphi$ plutôt que $\cos\varphi$ ou $\sin\varphi$.

$$\tan\varphi = \tan(2x - y) = \frac{\tan(2x) - \tan y}{1 + \tan(2x)\,\tan y} \qquad \text{avec} \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{3}{4}$$

$$\tan\varphi = \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{7})}{1 + \frac{3}{4}\,(-\frac{1}{7})} = 1\,. \qquad \text{D'où :} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + k\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Pour trouver la bonne détermination de φ , il faut localiser l'angle φ à l'aide des localisations données de x et de y .

a) Les angles x et y sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.



Donc $\quad 2x \in [-\pi\,,\,\pi\,]$

et $\quad -y \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$,

d'où $\quad \varphi \in [-\frac{3\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\,]$.

Cette localisation de $P(\varphi)$ sur un tour et demi n'est pas assez précise pour conclure.

Il faut recommencer en essayant d'être plus précis.

$x \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$, mais $\tan x > 0$,

donc $\quad x \in \,]\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$.

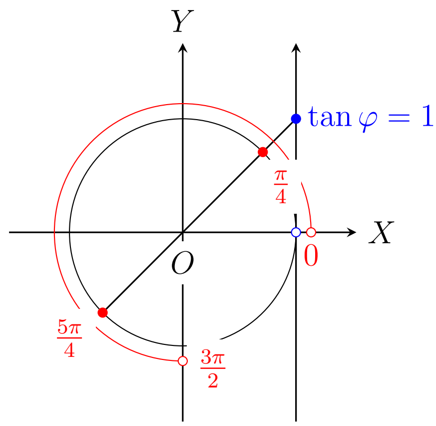
$y \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$, mais $\tan y < 0$,

donc $\quad y \in \,]-\frac{\pi}{2}\,,\,0\,[$.

D'où $\quad 2x \in \,]\,0\,,\,\pi\,[$

et $\quad -y \in \,]\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$

$\Rightarrow \quad \varphi \in \,]\,0\,,\,\frac{3\pi}{2}\,[$.



Cette localisation de φ n'est toujours pas assez précise pour conclure.

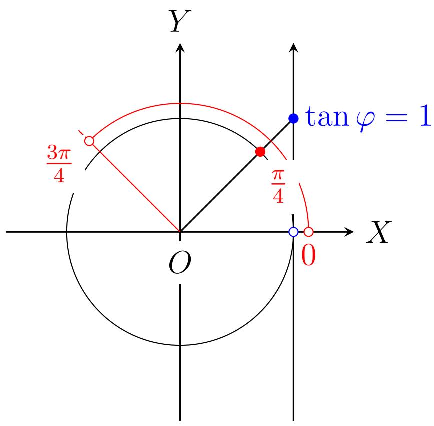
On recommence en essayant d'être encore plus précis.

$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, mais $0 < \tan x < 1$,
donc $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$.

$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, mais $-1 < \tan y < 0$,
donc $y \in]-\frac{\pi}{4}, 0[$.

D'où $2x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $-y \in]0, \frac{\pi}{4}[$
$\Rightarrow \varphi \in]0, \frac{3\pi}{4}[$.

On peut donc conclure :
$\tan\varphi = 1$ et $\varphi \in]0, \frac{3\pi}{4}[\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$.



b) Les angles x et y sont compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

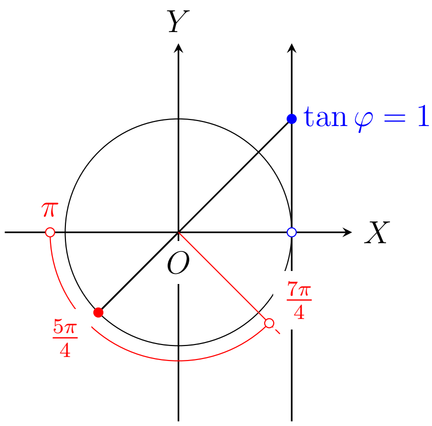
On procède de façon analogue.

$x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, mais $0 < \tan x < 1$, donc $x \in]\pi, \frac{5\pi}{4}[$.

De même $y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, mais $-1 < \tan y < 0$, donc $y \in]\frac{3\pi}{4}, \pi[$.

D'où $2x \in]2\pi, \frac{5\pi}{2}[$ et $-y \in]-\pi, -\frac{3\pi}{4}[\Rightarrow \varphi \in]\pi, \frac{7\pi}{4}[$.

On peut donc conclure : $\tan\varphi = 1$ et $\varphi \in]\pi, \frac{7\pi}{4}[\Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4}$.



5. Calculer sans calculatrice la valeur de $\tan(x+y)$ sachant que $\tan x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que y est défini par $\sin y = \cos(\frac{y}{3})$ avec $\frac{19\pi}{4} \leq y \leq 5\pi$.

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\, \tan y}$. On connaît $\tan x$, il faut donc déterminer $\tan y$.

Pour cela, on cherche à résoudre l'équation $\sin y = \cos(\frac{y}{3})$ sur l'intervalle $[\frac{19\pi}{4}, 5\pi]$.

$$\sin y = \cos(\tfrac{y}{3}) \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = \sin(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{y}{3}) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{y}{3}) + 2k\pi \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4y}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{2y}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3\pi}{8} + \frac{3k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ y = \frac{3\pi}{4} + 3k\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

L'intervalle de résolution $[\,\frac{19\pi}{4}\,,\,5\pi\,]$ est "petit", on cherche les solutions par tâtonnement.

- Les solutions de type $y = \frac{3\pi}{4} + 3k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$ n'appartiennent pas à $[\,\frac{19\pi}{4}\,,\,5\pi\,]$, car
  - si $k = 1\,,\quad y = \frac{3\pi}{4} + 3\pi = \frac{15\pi}{4} < \frac{19\pi}{4}\,,$
  - si $k = 2\,,\quad y = \frac{3\pi}{4} + 6\pi > 5\pi\,.$
- Observons les solutions de type $y = \frac{3\pi}{8} + \frac{3k\pi}{2}$ pour différentes valeurs de $k \in \mathbb{Z}$:
  - si $k = 2\,,\quad \frac{3\pi}{8} + 3\pi = \frac{27\pi}{8} < \frac{19\pi}{4}\,,$
  - si $k = 3\,,\quad y = \frac{3\pi}{8} + \frac{9\pi}{2} = \frac{19\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \in [\,\frac{19\pi}{4}\,,\,5\pi\,]\,,$
  - si $k = 4\,,\quad y = \frac{3\pi}{8} + 6\pi > 5\pi\,.$

L'unique solution appartenant à l'intervalle $[\,\frac{19\pi}{4}\,,\,5\pi\,]$ est $y = \frac{19\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{39\pi}{8}\,.$

Et $\quad \tan(\frac{39\pi}{8}) = \tan(5\pi - \frac{\pi}{8}) = \tan(-\frac{\pi}{8}) = -\tan\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}\,.$ (exercice **1.** d))

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + (1 - \sqrt{2})}{1 - (-\frac{\sqrt{2}}{2})\,(1 - \sqrt{2})} = \frac{-\sqrt{2} + 2\,(1 - \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}\,(1 - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{-3\,\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = -3 + \sqrt{2}\,.$$

6. Factoriser les expressions suivantes :

a) $\sin(5x) - \sin x$ b) $\cos^2(3x) - \cos^2 x$

---

a) On utilise les formules de transformation Sommes - Produits.

$$\sin(5x) - \sin x = 2\,\cos(\tfrac{5x+x}{2})\,\sin(\tfrac{5x-x}{2}) = 2\,\cos(3x)\,\sin(2x)\,.$$

b) $\cos^2(3x) - \cos^2 x = [\cos(3x) - \cos x]\,[\cos(3x) + \cos x]$

$= [-2\,\sin(2x)\,\sin x]\,[2\,\cos(2x)\,\cos x] = -4\,\sin(2x)\,\cos(2x)\,\sin x\,\cos x$

$= -\sin(4x)\,\sin(2x)\,.$

7. Factoriser avant de résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(3x) + \sin x = \sin(2x)$

b) $\cos(3x) + \cos(5x) = \cos x$

c) $\sin^2(5x) = \sin^2 x$

d) $(1 + \tan x)\,[\cos(7x) + \cos x] = 0$

---

a) $\sin(3x) + \sin x = \sin(2x)\,,\quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

Factorisation

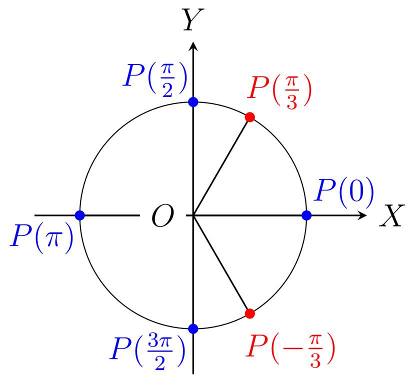
$$\begin{aligned}
\sin(3x) + \sin x = \sin(2x) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,\sin\left(\tfrac{3x+x}{2}\right)\,\cos\left(\tfrac{3x-x}{2}\right) = \sin(2x)\\
&\Leftrightarrow \quad 2\,\sin(2x)\,\cos x = \sin(2x)\\
&\Leftrightarrow \quad 2\,\sin(2x)\,\cos x - \sin(2x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \sin(2x)\,[\,2\,\cos x - 1\,] = 0\,.
\end{aligned}$$

Résolution

$$\sin(3x)+\sin x = \sin(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x)\,[\,2\,\cos x-1\,] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}\sin(2x) = 0\\ \text{ou}\\ 2\,\cos x - 1 = 0\end{array}\right.$$

- Résolution de l'équation $\sin(2x) = 0$

$$\begin{aligned}
\sin(2x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x = k\pi\\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2}\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$



- Résolution de l'équation $2\,\cos x - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
2\,\cos x - 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble solution : $S = \left\{\dfrac{k\pi}{2}\,,\ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

b) $\cos(3x) + \cos(5x) = \cos x\,,\quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

Factorisation

$$\begin{aligned}
\cos(5x) + \cos(3x) = \cos x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,\cos\left(\tfrac{5x+3x}{2}\right)\,\cos\left(\tfrac{5x-3x}{2}\right) = \cos x\\
&\Leftrightarrow \quad 2\,\cos(4x)\,\cos x = \cos x\\
&\Leftrightarrow \quad 2\,\cos(4x)\,\cos x - \cos x = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \cos x\,[\,2\,\cos(4x) - 1\,] = 0\,.
\end{aligned}$$

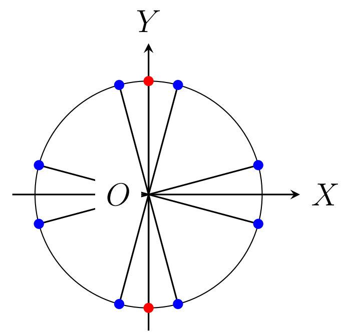
Résolution

$$\cos(3x)+\cos(5x)=\cos x \quad\Leftrightarrow\quad \cos x\,[\,2\,\cos(4x)-1\,]=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\cos x=0\\ \text{ou}\\ 2\,\cos(4x)-1=0\end{array}\right.$$

- Résolution de l'équation $\cos x=0$

$$\cos x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

- Résolution de l'équation $2\,\cos(4x)-1=0$



$$\begin{aligned}2\,\cos(4x)-1=0 \quad&\Leftrightarrow\quad \cos(4x)=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow\quad \cos(4x)=\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow\quad 4x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ &\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

D'où l'ensemble solution : $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ -\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\,,\ \ \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\,,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) $\sin^2(5x)=\sin^2 x\,,\quad D_{\text{def}}=\mathbb{R}\,.$

Factorisation

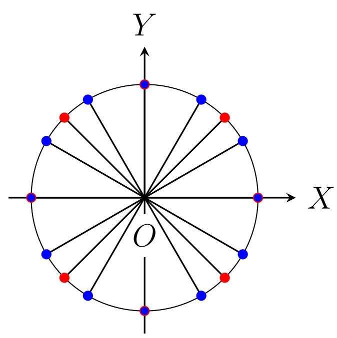
$$\begin{aligned}\sin^2(5x)-\sin^2 x=0 \quad&\Leftrightarrow\quad [\sin(5x)-\sin x]\cdot[\sin(5x)+\sin x]=0\\ &\Leftrightarrow\quad [2\,\cos(3x)\,\sin(2x)]\cdot[2\,\sin(3x)\,\cos(2x)]=0\\ &\Leftrightarrow\quad [2\,\sin(3x)\,\cos(3x)]\cdot[2\,\sin(2x)\,\cos(2x)]=0\\ &\Leftrightarrow\quad \sin(6x)\,\sin(4x)=0\,.\end{aligned}$$

Résolution

$$\sin^2(5x)=\sin^2 x \quad\Leftrightarrow\quad \sin(6x)\,\sin(4x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\sin(6x)=0\\ \text{ou}\\ \sin(4x)=0\end{array}\right.$$

- Résolution de l'équation $\sin(6x)=0$

$$\begin{aligned}\sin(6x)=0 \quad&\Leftrightarrow\quad 6x=k\pi\\ &\Leftrightarrow\quad x=\frac{k\pi}{6}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$



- Résolution de l'équation $\sin(4x)=0$

$$\begin{aligned}\sin(4x)=0 \quad&\Leftrightarrow\quad 4x=k\pi\\ &\Leftrightarrow\quad x=\frac{k\pi}{4}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble solution :

$$S = \left\{ \frac{k\pi}{6} \, , \, \frac{k\pi}{4} \, , \, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{k\pi}{2} \, , \, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \, , \, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \, , \, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \, , \, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Remarque

On aurait aussi pu résoudre les équations $\sin(5x) - \sin x = 0$ et $\sin(5x) + \sin x = 0$ comme des équations élémentaires en sinus :

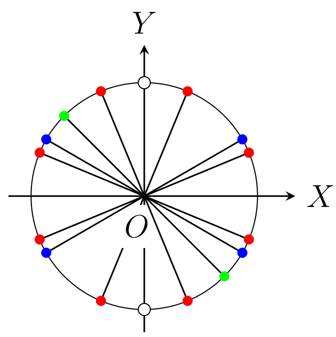
- $\sin(5x) = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$
- $\sin(5x) = -\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin(5x) = \sin(-x) \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$

d) $(1 + \tan x)\,[\cos(7x) + \cos x] = 0\,, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$

$$(1 + \tan x)\,[\cos(7x) + \cos x] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 + \tan x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(7x) + \cos x = 0 \end{cases}$$

- Résolution de l'équation $1 + \tan x = 0$

$$1 + \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \tan\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



- Résolution de l'équation $\cos(7x) + \cos x = 0$

$$\begin{aligned} & \cos(7x) + \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\,\cos(4x)\,\cos(3x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \cos(4x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(3x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Attention ! Les valeurs $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$ ne sont pas toutes contenues dans le domaine de définition.

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{6} + k\pi\,,\ \frac{5\pi}{6} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Remarque :

On aurait aussi pu résoudre l'équation $\cos(7x) + \cos x = 0$ comme une équation élémentaire en cosinus :

$\cos(7x) + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(7x) = -\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(7x) = \cos(\pi - x) \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$

8. Démontrer l'identité suivante : $\tan(\frac{x}{2}) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

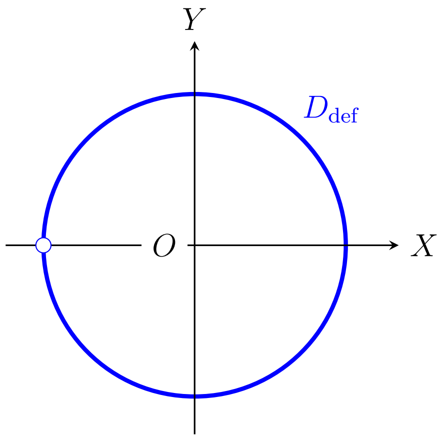
Domaine de définition

- L'expression $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est définie si et seulement si $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,,$ en d'autres termes, si et seulement si $x \neq \pi + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,.$
- L'expression $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ est définie si et seulement si $1+\cos x \neq 0\,.$

$$1+\cos x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x = -1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pi + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ces deux expressions ont donc même domaine de définition :

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{\, \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,\}\,.$$



Les deux expressions sont égales

Pour le montrer, posons $x = 2y\,.$

On a alors pour tout $x \neq \pi + 2k\pi\,,\quad y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,,$

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{\sin(2y)}{1+\cos(2y)} = \frac{2\,\sin y\,\cos y}{1+[\,2\,\cos^2 y - 1\,]} = \frac{2\,\sin y\,\cos y}{2\,\cos^2 y} = \tan y = \tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\,.$$

9. Exercice récréatif

Calculer la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$. En déduire la construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique.

Indication : chercher une équation polynomiale satisfaite par $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Posons $x = \cos(\frac{2\pi}{5})$. Par formule de duplication on a :

$$\cos(\tfrac{4\pi}{5}) = 2x^2 - 1 \qquad \text{et} \qquad \cos(\tfrac{8\pi}{5}) = 2(2x^2-1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

On sait par ailleurs que :

$$\cos(\tfrac{8\pi}{5}) = \cos(2\pi - \tfrac{2\pi}{5}) = \cos(\tfrac{2\pi}{5}) = x.$$

On en déduit que x vérifie l'équation suivante de degré 4 :

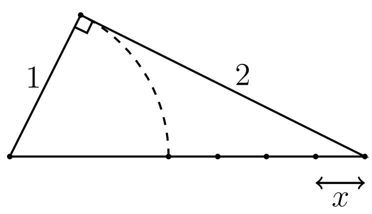
$$8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0.$$

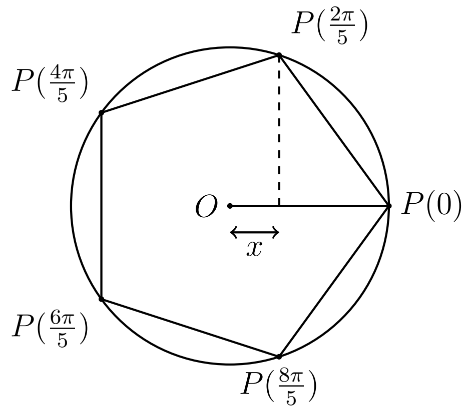
En fait, le raisonnement ci-dessus montre que cette équation est vérifiée par $\cos(\alpha)$ dès que $\cos(4\alpha) = \cos(\alpha)$. En prenant $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ (pour lesquels 4α et α diffèrent d'un multiple de 2π), on voit que 1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines du polynôme ci-dessus. On peut donc factoriser l'expression ci-dessus par $(x-1)(2x+1)$ pour obtenir :

$$(x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1) = 0$$

Comme $x \neq 1, -\frac{1}{2}$, on en déduit que x est racine du dernier facteur, ce qui conduit, par les formules de Viète à $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Il reste à remarquer que x est positif, car $\frac{2\pi}{5}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, pour conclure que $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Pour la construction du pentagone régulier, on commence par construire un segment de longueur x à la règle et au compas : pour cela, on construit deux segments de longueurs respectives 1 et 2 formant entre eux un angle droit puis on fait apparaitre la longueur x sur l'hypothénuse du triangle rectangle ainsi construit (qui mesure $\sqrt{5}$ par le théorème de Pythagore).





On reporte ensuite la longueur x obtenue sur l'axe des abscisses du cercle trigonométrique donné, afin de faire apparaitre le point $P(\frac{2\pi}{5})$. Les autres sommets du pentagone sont obtenues successivement en reportant la longueur séparant $P(0)$ de $P(\frac{2\pi}{5})$.