Corrigé 3

1. Exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une fonction trigonométrique de l'angle x uniquement.

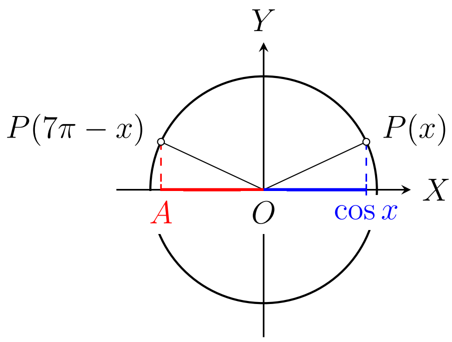
a) $A = \cos(7\pi - x)$ c) $C = \sin(\frac{3\pi}{2} - x)$ e) $E = \cot(-\frac{5\pi}{2} - x)$

b) $B = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ d) $D = \cos(x - \frac{9\pi}{2})$ f) $F = \sin(x + n\,\frac{\pi}{2})\,,\ n \in \mathbb{N}$

---

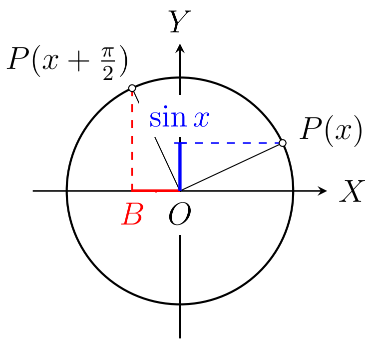
a)

$$\begin{aligned} A &= \cos(7\pi - x) \\ &= \cos\left[6\pi + (\pi - x)\right] \\ &= \cos(\pi - x) \\ &= -\cos x\,. \end{aligned}$$



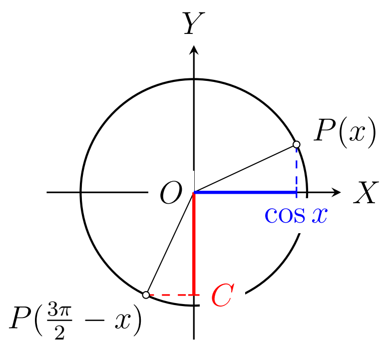
b)

$$\begin{aligned} B &= \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) \\ &= \sin\left[\tfrac{\pi}{2} - (x + \tfrac{\pi}{2})\right] \\ &= \sin(-x) \\ &= -\sin x\,. \end{aligned}$$



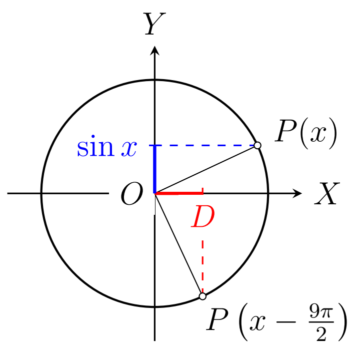
c)

$$\begin{aligned} C &= \sin\left(\tfrac{3\pi}{2} - x\right) \\ &= \cos\left[\tfrac{\pi}{2} - \left(\tfrac{3\pi}{2} - x\right)\right] \\ &= \cos(-\pi + x) \\ &= \cos(\pi - x) \\ &= -\cos x\,. \end{aligned}$$



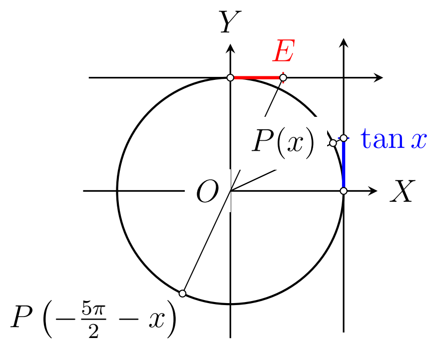
d)

$$\begin{aligned} D &= \cos\left(x - \tfrac{9\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left[\tfrac{\pi}{2} - \left(x - \tfrac{9\pi}{2}\right)\right] \\ &= \sin(5\pi - x) \\ &= \sin(\pi - x) \\ &= \sin x\,. \end{aligned}$$



e)

$$\begin{aligned} E &= \cot\left(-\tfrac{5\pi}{2} - x\right) \\ &= \tan\left[\tfrac{\pi}{2} - \left(-\tfrac{5\pi}{2} - x\right)\right] \\ &= \tan(3\pi + x) \\ &= \tan x\,. \end{aligned}$$



f) $F = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$

- Si $n = 0$: $\quad F = \sin x\,.$

- Si $n = 1$: $\quad F = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\,.$

- Si $n = 2$: $\quad F = \sin\left(x + \pi\right) = -\sin x\,.$

- Si $n = 3$: $\quad F = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x\,.$

- Si $n = 4$: $\quad F = \sin\left(x + 2\pi\right) = \sin x\,.$
  On retrouve la situation correspondant au cas $n = 0$
  et il en est de même pour $n = 8\,,\ 12\,,\ 16\,,\ \cdots\,,\ 4k\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

- Si $n = 5$:
  $F = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left[2\pi + \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\,.$
  On retrouve la situation correspondant au cas $n = 1$
  et il en est de même pour $n = 9\,,\ 13\,,\ 17\,,\ \cdots\,,\ 4k+1\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

- Si $n = 6$:
  $F = \sin\left(x + 3\pi\right) = \sin\left[2\pi + (x + \pi)\right] = \sin\left(x + \pi\right) = -\sin x\,.$
  On retrouve la situation correspondant au cas $n = 2$
  et il en est de même pour $n = 10\,,\ 14\,,\ 18\,,\ \cdots\,,\ 4k+2\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

- Si $n = 7$:
  $F = \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left[2\pi + \left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x\,.$
  On retrouve la situation correspondant au cas $n = 3$
  et il en est de même pour $n = 11\,,\ 15\,,\ 19\,,\ \cdots\,,\ 4k+3\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

En résumé :

$$F = \sin(x + n\,\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n = 4k \\ \cos x & \text{si} \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n = 4k+1 \\ -\sin x & \text{si} \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n = 4k+2 \\ -\cos x & \text{si} \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n = 4k+3\,. \end{cases}$$

2. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle donné :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$ c) $\tan x = -1$, $-4\pi \leq x \leq -3\pi$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$ d) $\cot x = \sqrt{3}$, $-\pi \leq x \leq 0$

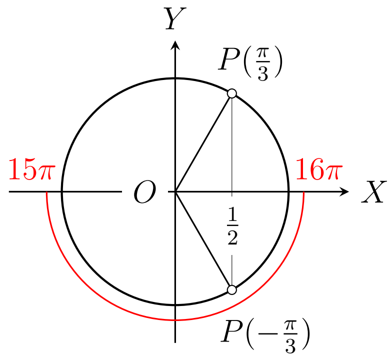
---

a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = \frac{\pi}{3}$. On en déduit toutes les autres :

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Résolution sur l'intervalle $[15\pi\,,\,16\pi\,]$:

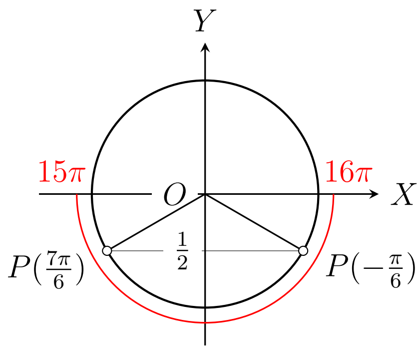
$$x = 16\pi - \frac{\pi}{3}\,, \qquad S = \left\{\frac{47\pi}{3}\right\}.$$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. On en déduit toutes les autres :

$$\sin x = \sin -\frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\,k\,\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Résolution sur l'intervalle $[15\pi\,,\,16\pi\,]$: $x = 15\pi + \frac{\pi}{6}$ ou $x = 16\pi - \frac{\pi}{6}$,

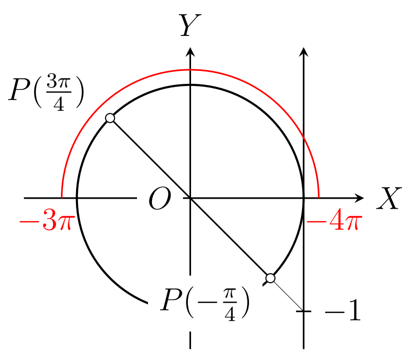
$$S = \left\{\frac{91\pi}{6}\,,\,\frac{95\pi}{6}\right\}.$$

c) $\tan x = -1$, $-4\pi \leq x \leq -3\pi$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. On en déduit toutes les autres :

$$\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$



Résolution sur l'intervalle $[-4\pi\,,\,-3\pi\,]$:

L'unique solution, représentée par le point $P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ est donnée par

$$x = -4\pi + \frac{3\pi}{4} \qquad \text{ou} \qquad x = -3\pi - \frac{\pi}{4}\,, \qquad S = \left\{-\frac{13\pi}{4}\right\}.$$

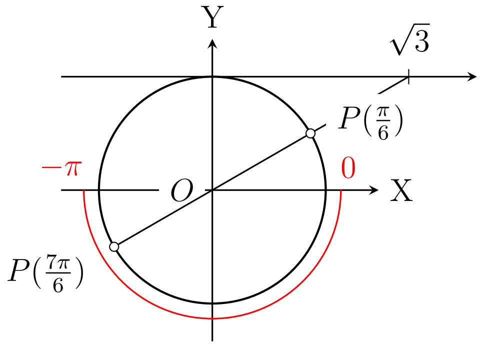
d) $\cot x = \sqrt{3}$, $\quad -\pi \leq x \leq 0$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

On en déduit toutes les autres :

$$\cot x = \cot\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$



L'unique solution, représentée par le point $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ est donnée par

$$x = -\pi + \frac{\pi}{6}\,, \qquad S = \left\{-\tfrac{5\pi}{6}\right\}\ .$$

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $(\cos t)\,(2\,\cos t + 3) = -1$ $\qquad$ b) $4 - 5\sin t = 2\cos^2 t$, $\quad -\frac{11\pi}{2} \leq t \leq -5\pi$

---

a) $(\cos t)\,(2\,\cos t + 3) = -1\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

C'est une équation du deuxième degré en $\cos t$:

$$(\cos t)\,(2\,\cos t + 3) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,\cos^2 t + 3\,\cos t + 1 = 0\,.$$

On la résout à l'aide de son discriminant Δ :

$$\Delta = 3^2 - 8 = 1\,, \qquad \cos t = \frac{-3-1}{4} = -1 \qquad \text{ou} \qquad \cos t = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}\,,$$

ou en devinant une factorisation :

$$2\,\cos^2 t + 3\,\cos t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\,\cos t + 1)\,(\cos t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos t = -1 \qquad \text{ou} \qquad \cos t = -\frac{1}{2}\,.$$

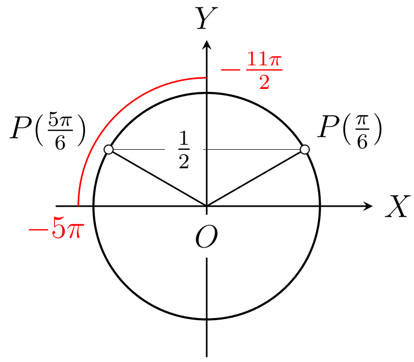
On résout chaque équation élémentaire :

- $\cos t = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos t = \cos\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$
- $\cos t = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos t = \cos\frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

L'ensemble solution est la réunion de toutes les solutions :

$$S = \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \pi + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) $4 - 5\sin t = 2\cos^2 t\,,\quad -\frac{11\pi}{2} \leq t \leq -5\pi$



$4 - 5\sin t = 2\,(1 - \sin^2 t)$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 t - 5\sin t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (2\sin t - 1)\,(\sin t - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin t = \frac{1}{2}$ car $\sin t \neq 2 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

$\sin t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}.$

Sur l'intervalle $[-\frac{11\pi}{2}\,, -5\pi\,]$, $t = -5\pi - \frac{\pi}{6}\,,\quad S = \left\{-\frac{31\pi}{6}\right\}.$

4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné.

a) $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\qquad x \in [\,0\,,\,\pi\,]\,,$

b) $4\,\sin^4(2x) - 11\,\sin^2(2x) + 6 = 0\,,\qquad x \in [-\frac{3\pi}{2}\,, -\frac{\pi}{2}\,]\,,$

c) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\qquad x \in [\,0\,,\,\pi\,]\,,$

d) $\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}\,,\qquad x \in \,]\,0\,,\,2\pi\,[\,.$

---

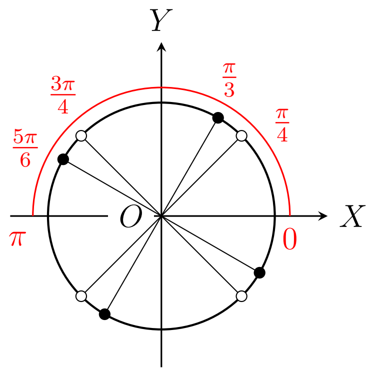
a) Résolution de l'équation $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin(4x + \tfrac{\pi}{3}) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sin(4x + \tfrac{\pi}{3}) = \sin(-\tfrac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x + \frac{\pi}{3} = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = \pi + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$



- Résolution sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$

  Il y a quatre solutions sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$,

  - celles définies par $-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\,,\quad k=1,2:\qquad x=\dfrac{\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}$
  - et celles définies par $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\,,\quad k=0,1:\qquad x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}\,.$

$$S=\left\{\,\tfrac{\pi}{4}\,,\ \tfrac{\pi}{3}\,,\ \tfrac{3\pi}{4}\,,\ \tfrac{5\pi}{6}\,\right\}\,.$$

b) Résolution de l'équation $\quad 4\,\sin^4(2x)-11\,\sin^2(2x)+6=0\,.$

Domaine de définition : $\quad D_{\text{def}}=\mathbb{R}\,.$

On résout cette équation bicarrée à l'aide de son discriminant Δ :

$$\Delta=(-11)^2-4{\cdot}4{\cdot}6=25\,,\qquad \sin^2(2x)=\frac{11-5}{8}=\frac{3}{4}\quad\text{ou}\quad \sin^2(2x)=\frac{11+5}{8}=2\,,$$

Seule la solution $\sin^2(2x)=\frac{3}{4}$ est acceptable :

$$\sin^2(2x)=\frac{3}{4}\quad\Leftrightarrow\quad \sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{ou}\quad \sin(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

- $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Leftrightarrow\quad \sin(2x)=\sin(-\frac{\pi}{3})\quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ 2x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.$

  $\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\qquad k\in\mathbb{Z}$

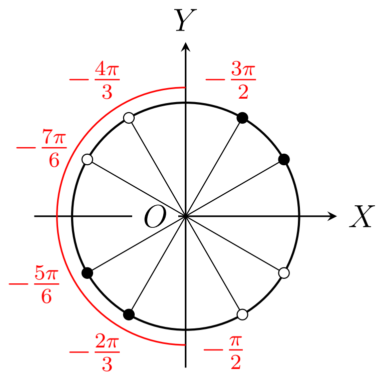
- $\sin(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Leftrightarrow\quad \sin(2x)=\sin(\frac{\pi}{3})\quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ 2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.$

  $\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\qquad k\in\mathbb{Z}$

Résolution sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}\,,\,-\frac{\pi}{2}\right]$

- Deux solutions correspondent à $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
  il s'agit de $x = -\frac{4\pi}{3}$ et $x = -\frac{7\pi}{6}$.
- Deux solutions correspondent à $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
  il s'agit de $x = -\frac{5\pi}{6}$ et $x = -\frac{2\pi}{3}$.

$$S = \left\{-\frac{4\pi}{3}\,,\ -\frac{7\pi}{6}\,,\ -\frac{5\pi}{6}\,,\ -\frac{2\pi}{3}\right\}.$$



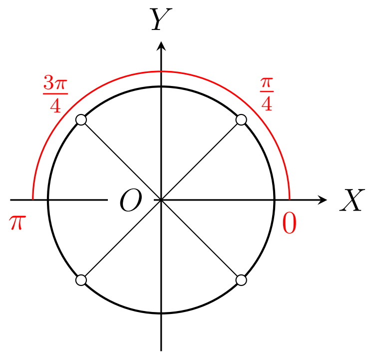
c) Résolution de l'équation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$D_{\text{def}} = \left\{\, x\in\mathbb{R} \mid 2x+\tfrac{\pi}{3}\in D_{\tan} \,\right\} = \mathbb{R}\setminus\left\{\,\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{k\pi}{2}\,,\ k\in\mathbb{Z}\,\right\}.$$

$$\tan\left(2x+\tfrac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\left(2x+\tfrac{\pi}{3}\right) = \tan(-\tfrac{\pi}{6}) \quad\Leftrightarrow\quad 2x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x = -\frac{\pi}{2}+k\pi \quad\Leftrightarrow\quad x = -\frac{\pi}{4}+k\,\frac{\pi}{2}\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$



- Résolution sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$
  Il y a deux solutions sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$, celles qui correspondent à $k=1$ et $k=2$.

$$S = \left\{\,\frac{\pi}{4}\,,\ \frac{3\pi}{4}\,\right\}.$$

d) Résolution de l'équation $\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$ sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\pi\,[$.

$$D_{\text{def}} = \left\{\, x\in\mathbb{R} \mid \tfrac{x}{2}\in D_{\cot} \,\right\} = \mathbb{R}\setminus\left\{\,2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,\right\}.$$

$$\cot^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{1}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \cot\left(\tfrac{x}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

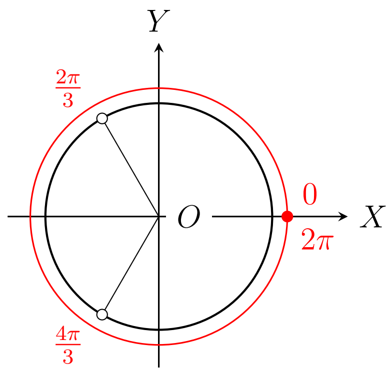
- Résolution sur $\mathbb{R}$

  - $\cot\left(\frac{x}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \cot\left(\frac{x}{2}\right)=\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{3}+k\,\pi$

    $\Leftrightarrow \quad x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\,\pi\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\,.$

  - $\cot\left(\frac{x}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \cot\left(\frac{x}{2}\right)=\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x}{2}=-\dfrac{\pi}{3}+k\,\pi$

    $\Leftrightarrow \quad x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\,\pi\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\,.$



- Résolution sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\pi\,[$

  Il y a deux solutions sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\pi\,[$,

  - l'une correspond à $x=\frac{2\pi}{3}+2k\,\pi$ avec $k=0$
  - et l'autre correspond à $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\,\pi$ avec $k=1\,.$

$$S=\left\{\,\tfrac{2\pi}{3}\,,\ \tfrac{4\pi}{3}\,\right\}\,.$$

5. Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(2x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$

b) $\cos(2x)=\cos(\frac{x}{3})$

c) $\cos(2x)=\sin(3x)$

d) $\tan(\frac{x}{3})=\cot(x-\frac{\pi}{6})$

---

a) $\sin(2x)=\sin(x+\frac{\pi}{3}) \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} 2x=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x=\pi-(x+\frac{\pi}{3})+2k\pi \end{array}\right. \qquad k\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$S=\left\{\tfrac{\pi}{3}+2k\pi\,,\ \tfrac{2\pi}{9}+\tfrac{2k\pi}{3}\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\,.$$

b) $\cos(2x) = \cos(\frac{x}{3}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = \frac{x}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{x}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{5x}{3} = 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{7x}{3} = 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{6k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = \frac{6k\pi}{7} \end{cases} \qquad S = \left\{ \frac{6k\pi}{5}\,,\ \frac{6k\pi}{7}\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

c) $\cos(2x) = \sin(3x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \cos[\,\frac{\pi}{2} - 3x\,]$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -[\,\frac{\pi}{2} - 3x\,] + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ -x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = +\frac{\pi}{2} - 2k\pi \end{cases} \qquad S = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\,,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) $\tan(\frac{x}{3}) = \cot(x - \frac{\pi}{6})\,, \quad D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x}{3} \in D_{\tan} \ \text{ et } \ x - \frac{\pi}{6} \in D_{\cot} \right\},$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + 3k\pi\,,\ \frac{\pi}{6} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\tan(\frac{x}{3}) = \cot(x - \frac{\pi}{6}) \quad \Leftrightarrow \quad \tan(\frac{x}{3}) = \tan[\,\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{6})\,]$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{6}) + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x}{3} = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}.$

On vérifie que ces valeurs sont bien dans le domaine de définition :

- $\frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} \neq \frac{\pi}{6} + n\pi\,, \quad \forall\, k, n \in \mathbb{Z}$
- et $\frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{2} + 3n\pi\,, \quad \forall\, k, n \in \mathbb{Z}$, car
  $\frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 3n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3k}{4} = 3n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,(k - 4n) = 4\,,$
  ce qui n'est pas possible si k et n sont entiers.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4}\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6. Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle donné :

a) $\sin x \geq \frac{1}{2}\,, \quad 4\pi \leq x < 5\pi\,,$

b) $-\frac{1}{2} < \cos x < 0\,, \quad -5\pi \leq x < -3\pi\,,$

c) $\sin(\,3x + \frac{\pi}{4}\,) \,>\, \sin(-\frac{3\,\pi}{4}\,)\,, \quad -2\pi \leq x < 0\,,$

d) $\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \quad 0 \leq x < 2\pi\,,$

e) $\cot x > \sqrt{3}\,, \quad -2\pi \leq x < \pi\,,$

f) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\,, \quad x \in [-\pi\,,\, 0\,]\,.$

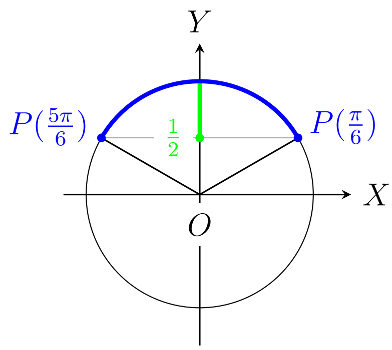
a) Résolution de l'inéquation $\sin x \geq \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[\,4\pi\,,\,5\pi\,[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que

$$\sin x \geq \tfrac{1}{2}\,.$$

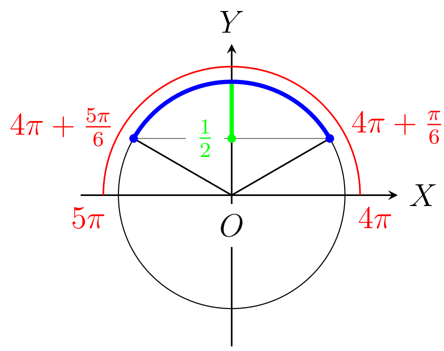
On représente, sur l'axe des sinus, les valeurs plus grandes que $\frac{1}{2}$.

Puis on en déduit les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est plus grande que $\frac{1}{2}$.



$$\sin x \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6}+2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\,4\pi\,,\,5\pi\,[$:



$$4\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 4\pi + \frac{5\pi}{6}\,,$$

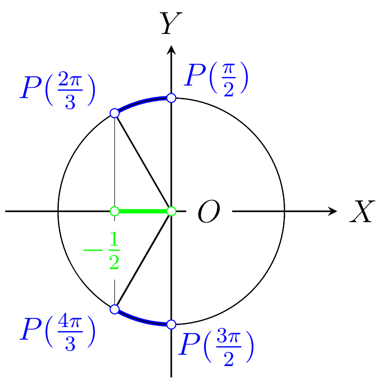
$$S = \left[\,\tfrac{25\pi}{6}\,,\,\tfrac{29\pi}{6}\,\right].$$

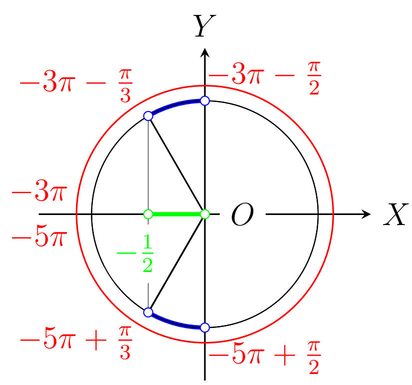
b) Résolution de l'inéquation $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$ sur l'intervalle $[-5\pi\,,\,-3\pi\,[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que $-\frac{1}{2} < \cos x < 0\,.$

On représente, sur l'axe des cosinus, les valeurs comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $0\,.$
Puis on en déduit les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $0\,.$

$$-\tfrac{1}{2} < \cos x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$





- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à $[-5\pi\,,\,-3\pi\,[$:

$$-5\pi + \frac{\pi}{3} < x < -5\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad -3\pi - \frac{\pi}{2} < x < -3\pi - \frac{\pi}{3}\,,$$

$$S = \left]-\tfrac{14\pi}{3}\,,\,-\tfrac{9\pi}{2}\right[\,\cup\, \left]-\tfrac{7\pi}{2}\,,\,-\tfrac{10\pi}{3}\right[.$$

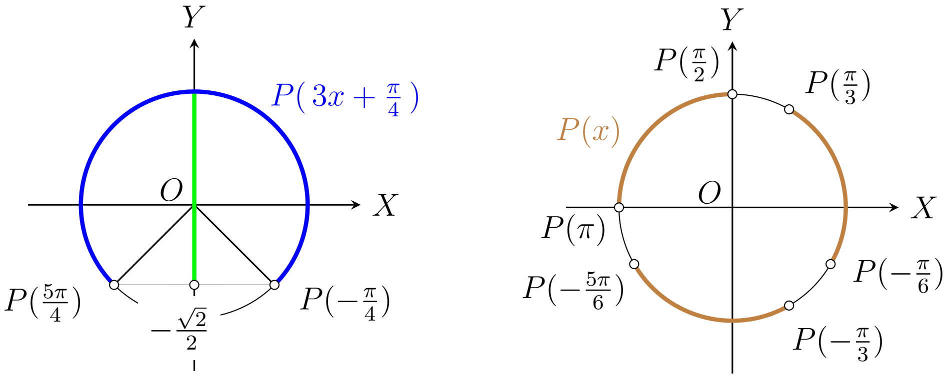
c) Résolution de l'inéquation $\sin(\,3x+\frac{\pi}{4}\,) > \sin(-\frac{3\pi}{4}\,)$ sur l'intervalle $[-2\pi\,,\,0\,[$

- Représentation des points $P(\,3x+\frac{\pi}{4}\,)$ tels que $\sin(\,3x+\frac{\pi}{4}\,) > \sin(-\frac{3\pi}{4}\,)$.

  Sur l'axe des sinus, on représente les valeurs supérieures à $\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

  Puis on représente les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est plus grande que $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

  $$\sin(\,3x+\tfrac{\pi}{4}\,) > \sin(-\tfrac{3\pi}{4}\,) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4}+2k\pi < 3x+\frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}+2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

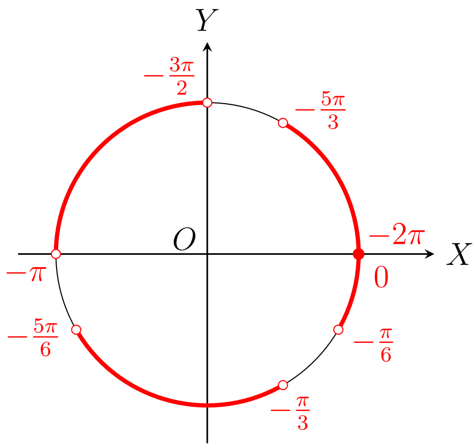


- On en déduit les points $P(x)$ vérifiant $\sin(\,3x+\frac{\pi}{4}\,) > \sin(-\frac{3\pi}{4}\,)$:

  $$-\frac{\pi}{4}+2k\pi < 3x+\frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}+2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+2k\pi < 3x < \pi+2k\pi$$
  $$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à $[-2\pi\,,\,0\,[$:

  $$S = [-2\pi\,,\,-\tfrac{5\pi}{3}\,[\,\cup\,]-\tfrac{3\pi}{2}\,,-\pi\,[\,\cup\,]-\tfrac{5\pi}{6}\,,-\tfrac{\pi}{3}\,[\,\cup\,]-\tfrac{\pi}{6}\,,0\,[\,.$$



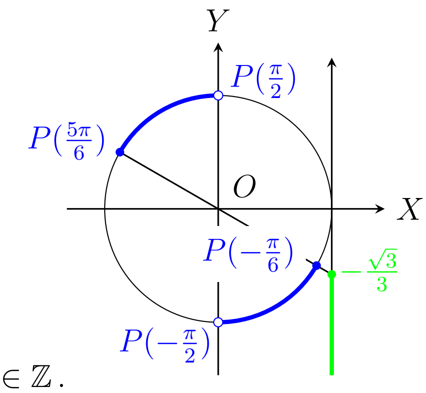
d) Résolution de l'inéquation $\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que

$$\tan x \leq -\tfrac{\sqrt{3}}{3}.$$

On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus petites que $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

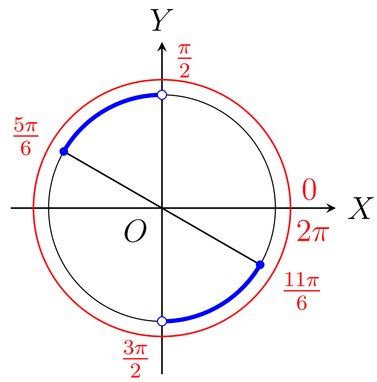


$$\tan x \leq -\tfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+k\pi < x \leq -\frac{\pi}{6}+k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,[$:

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{11\pi}{6}$$

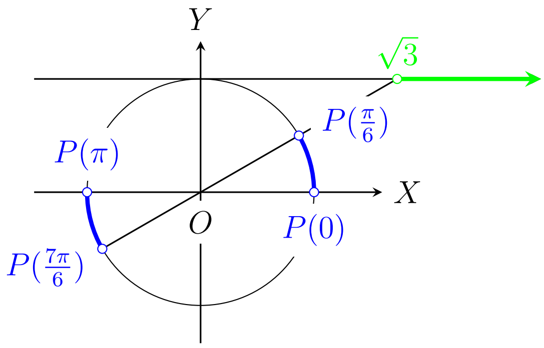
$$S = \left]\,\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{5\pi}{6}\,\right] \,\cup\, \left]\,\tfrac{3\pi}{2}\,,\,\tfrac{11\pi}{6}\,\right].$$

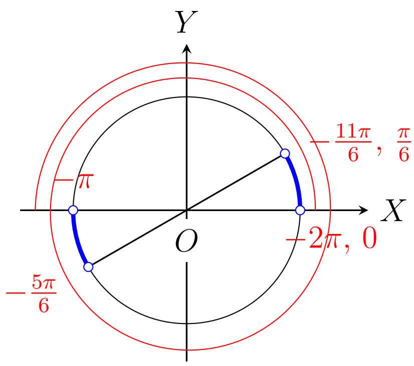


e) Résolution de l'inéquation $\cot x > \sqrt{3}$ sur l'intervalle $[-2\pi\,,\,\pi\,[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que $\cot x > \sqrt{3}$.
On représente, sur l'axe des cotangentes, les valeurs plus grandes que $\sqrt{3}$.
Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

$$\cot x > \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad k\pi < x < \frac{\pi}{6}+k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$





- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-2\pi\,,\,\pi\,[$:

$$-2\pi < x < -2\pi+\frac{\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad -\pi < x < -\pi+\frac{\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{6}\,,$$

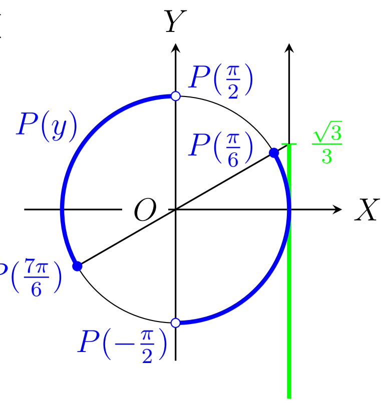
$$S = \left]-2\pi\,,\,-\tfrac{11\pi}{6}\,\right[\,\cup\, \left]-\pi\,,\,-\tfrac{5\pi}{6}\,\right[\,\cup\, \left]\,0\,,\,\tfrac{\pi}{6}\,\right[.$$

f) Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

- Représentation des points $P(y)$ tels que $\tan y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

  On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus petites que $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

  Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.



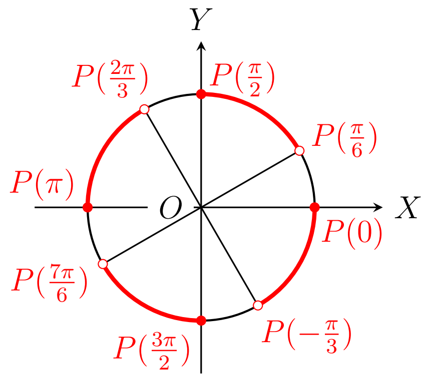
$$\tan y \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+k\pi < y \leq \frac{\pi}{6}+k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Solutions de l'inéquation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

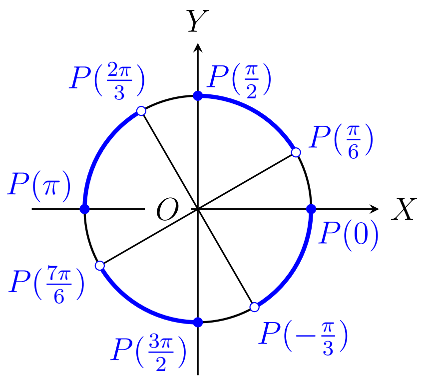
$$\tan\left(2x+\tfrac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+k\pi < 2x+\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}+k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

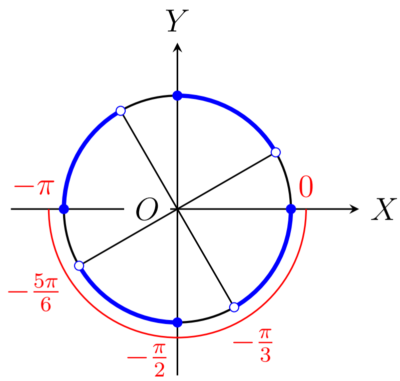
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2\pi}{3}+k\pi \;<\; 2x \;\leq\; k\pi \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2} \;<\; x \;\leq\; \frac{k\pi}{2}\,.$$

  On en déduit la représentation, sur le cercle trigonométrique, des points $P(x)$ représentant les solutions de l'inéquation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$:



Recherche des solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi\,,\,0]$





$$S = \{-\pi\} \,\cup\, \left]-\tfrac{5\pi}{6}\,,\,-\tfrac{\pi}{2}\right] \,\cup\, \left]-\tfrac{\pi}{3}\,,\,0\right]\,.$$

7. Soit A l'expression définie par $A = \dfrac{\cos(x-\frac{\pi}{2})\cdot\tan(\frac{3\pi}{2}+x)}{\sin(x+\frac{5\pi}{2})-\cos(\pi-x)}$.

a) Déterminer le domaine de définition de A.

b) Simplifier cette expression.

---

a) $D_{\text{def}} = \left\{x\in\mathbb{R} \mid \tan(\frac{3\pi}{2}+x) \text{ soit défini et } \sin(x+\frac{5\pi}{2})-\cos(\pi-x)\neq 0\right\}$

- $\tan(\frac{3\pi}{2}+x)$ est défini si et seulement si $\frac{3\pi}{2}+x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
  $\Leftrightarrow \quad x\neq \ell\pi, \quad \ell\in\mathbb{Z}$.
- Résolvons l'équation $\sin(x+\frac{5\pi}{2})=\cos(\pi-x)$.
  - $\sin(x+\frac{5\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\sin[\pi-(x+\frac{\pi}{2})]=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$
  - $\cos(\pi-x)=-\cos x$

  L'équation devient :

  $\cos x=-\cos x \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$.

D'où $D_{\text{def}}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b)
- Simplification du numérateur
  - $\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos[-(x-\frac{\pi}{2})]=\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$.
  - $\tan(\frac{3\pi}{2}+x)=\cot[\frac{\pi}{2}-(\frac{3\pi}{2}+x)]=\cot(-\pi-x)=\cot(-x)=-\cot x$.

  Le numérateur s'écrit donc

  $\cos(x-\frac{\pi}{2})\cdot\tan(\frac{3\pi}{2}+x)=-\sin x\cdot\cot x=-\cos x$.
- La simplification du dénominateur a déjà été faite sous a) :

  $\sin(x+\frac{5\pi}{2})=\cos x$ et $\cos(\pi-x)=-\cos x$.

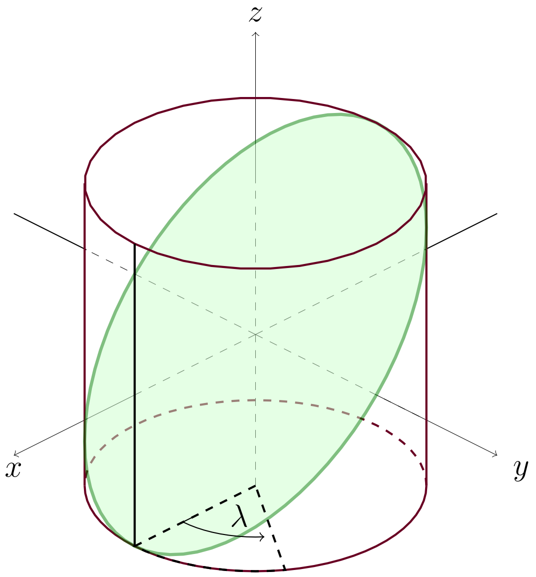
  Le dénominateur s'écrit donc $\sin(x+\frac{5\pi}{2})-\cos(\pi-x)=2\cos x$.

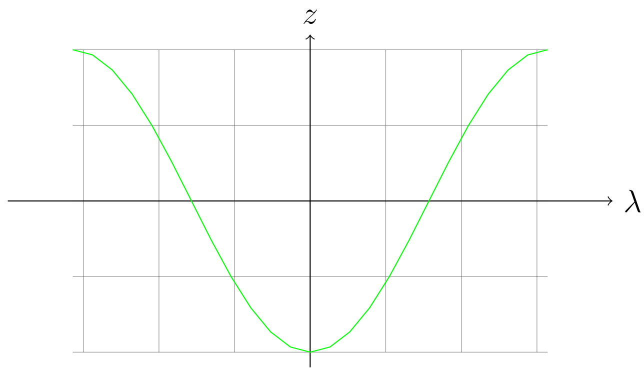
Sur son domaine de définition :

$$A=\frac{\cos(x-\frac{\pi}{2})\cdot\tan(\frac{3\pi}{2}+x)}{\sin(x+\frac{5\pi}{2})-\cos(\pi-x)}=\frac{-\cos x}{2\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

8. Exercice récréatif

On considère un cylindre centré en $(0,0,0)$, de rayon R. Celui-ci est intersecté par un plan contenant l'axe (Oy). L'angle formé par le plan et l'horizontale est de α. On découpe le cylindre le long d'une arête verticale et on le déplie. Décrire la courbe que forme l'intersection entre le cylindre et le plan.





Soit un point P sur l'intersection du cylindre avec le plan incliné. Celui-ci aura comme ccordonnées $P(R\cos(\lambda), R\sin(\lambda), z_P)$. La projection Q de ce point sur le plan (yOz) aura comme coordonnées $Q(0, R\sin(\lambda), z_P)$. Soit encore le point $A(0, R\sin(\lambda), 0)$. On a $\widehat{QPA} = \alpha$. On en conclut que

$$\frac{z_A - z_p}{R\cos(\lambda)} = \tan(\alpha) \Leftrightarrow z_p(\lambda) = -\tan(\alpha) R\cos(\lambda).$$