# Corrigé 2

**1.** A l'aide du cercle trigonométrique, mais sans machine à calculer, déterminer les valeurs suivantes :

a) $\cos(\frac{179\pi}{3})$ b) $\sin(-\frac{374\pi}{6})$ c) $\tan(\frac{163\pi}{4})$ d) $\cot(-\frac{67\pi}{3})$

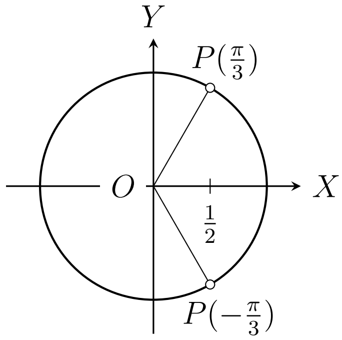
---

a) $\cos(\frac{179\pi}{3}) = \cos(60\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3})$.

Or les points $P(-\frac{\pi}{3})$ et $P(\frac{\pi}{3})$ sont symétriques par rapport à l'axe $Ox$.

Donc $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3})$.

Et $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, d'où $\cos(\frac{179\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

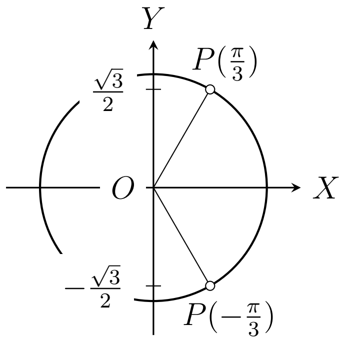



b) $\sin(-\frac{374\pi}{6}) = \sin(-62\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3})$.

Or les points $P(-\frac{\pi}{3})$ et $P(\frac{\pi}{3})$ sont symétriques par rapport à l'axe $Ox$.

Donc $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3})$.

Et $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $\sin(-\frac{374\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

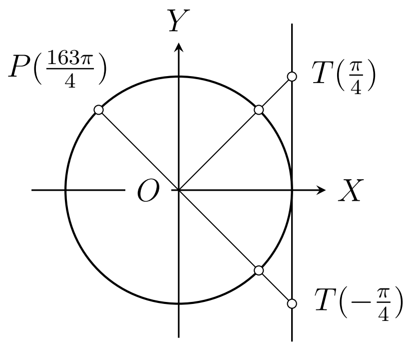



c) $\tan(\frac{163\pi}{4}) = \tan(41\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(-\frac{\pi}{4})$.

Or les points $T(-\frac{\pi}{4})$ et $T(\frac{\pi}{4})$ sont symétriques par rapport à l'axe $Ox$.

Donc $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4})$.

Et $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, d'où $\tan(\frac{163\pi}{4}) = -1$.

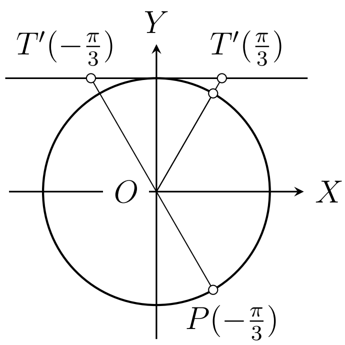



d) $\cot(-\frac{67\pi}{3}) = \cot(-22\pi - \frac{\pi}{3}) = \cot(-\frac{\pi}{3})$.

Or les points $T'(-\frac{\pi}{3})$ et $T'(\frac{\pi}{3})$ sont symétriques par rapport à l'axe $Oy$.

Donc $\cot(-\frac{\pi}{3}) = -\cot(\frac{\pi}{3})$.

Et $\cot(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, d'où $\cot(-\frac{67\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.



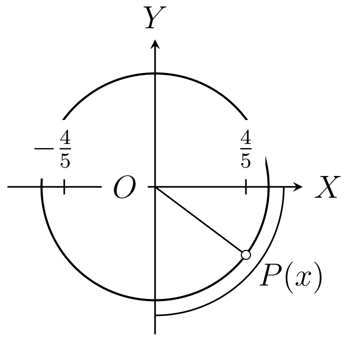
**2.** Calculer, sans machine, la valeur des fonctions trigonométriques des angles ainsi définis :

a) $\cos x = \pm\frac{4}{5}$ , $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi$ c) $\tan x = \pm\frac{4}{3}$ , $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$

b) $\sin x = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$ , $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$ d) $\cot x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$ , $11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2}$

---

a) $x$ est défini par $\cos x = \pm\frac{4}{5}$ , $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi$ .




- Signe des fonctions trigonométriques de $x$ .

  Localisation de $P(x)$ :

  $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi \quad \Rightarrow \quad P(x) \in IV$ .

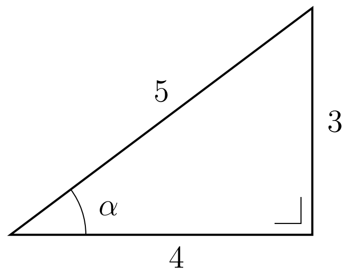
  Donc $\cos x > 0$ , $\sin x < 0$ et $\tan x < 0$ .

- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de $x$ .

  Soit $\alpha$ l'angle géométrique aigu défini par $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ .

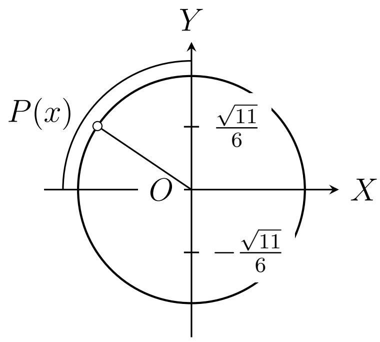
  A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ :

  $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ et $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ .




En conclusion : $\cos x = \frac{4}{5}$ , $\sin x = -\frac{3}{5}$ et $\tan x = -\frac{3}{4}$ .

b) $x$ est défini par $\sin x = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$ , $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$ .




- Signe des fonctions trigonométriques de $x$ .

  Localisation de $P(x)$ :

  $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi \quad \Rightarrow \quad P(x) \in II$ .

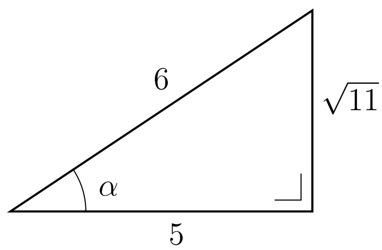
  Donc $\sin x > 0$ , $\cos x < 0$ et $\tan x < 0$ .

- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de $x$ .

  Soit $\alpha$ l'angle géométrique aigu défini par $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$ .

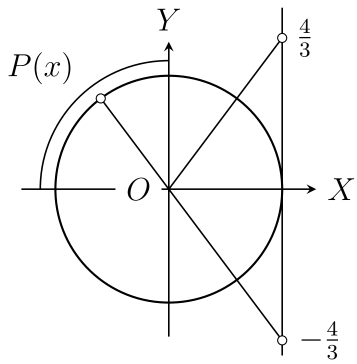
  A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$ :

  $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ et $\tan\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$ .




En conclusion : $\sin x = \frac{\sqrt{11}}{6}$ , $\cos x = -\frac{5}{6}$ et $\tan x = -\frac{\sqrt{11}}{5}$ .

c) $x$ est défini par $\tan x = \pm\frac{4}{3}$ , $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$




- Signe des fonctions trigonométriques de $x$ .

  Localisation de $P(x)$ :

  $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi \quad \Rightarrow \quad P(x) \in II$ .

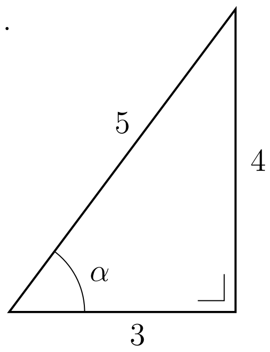
  Donc $\tan x < 0$ , $\sin x > 0$ et $\cos x < 0$ .

- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de $x$ .

  Soit $\alpha$ l'angle géométrique aigu défini par $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ .

  A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ :

  $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ et $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ .




En conclusion : $\tan x = -\frac{4}{3}$ , $\sin x = \frac{4}{5}$ et $\cos x = -\frac{3}{5}$ .

d) $\cot x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$ , $11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2}$ .

$11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad P(x) \in III$ .

Or $P(x) \in III$ et $\cot x < 0$ sont incompatibles.

**3.** a) Calculer $A = \sin x - \dfrac{1}{\cos x}$ sachant que $\tan x = -\frac{1}{2}$ et $4\pi \leq x \leq 5\pi$ .

b) Soit $\varphi$ l'angle défini par $\sin\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $65\pi < 2\varphi < 67\pi$ .

Calculer $B = \dfrac{3\sin\varphi - 2\cos\varphi - 5\tan\varphi}{1 + \sin\varphi\cdot\cos\varphi - 3\tan^2\varphi}$ .

---

a)
- Localisation de $P(x)$ :

  $4\pi \leq x \leq 5\pi \quad \Rightarrow \quad P(x) \in I \cup II$ . Or $\tan x < 0$ donc $P(x) \in II$ .

  On en déduit donc que $\sin x > 0$ et $\cos x < 0$ .

- Calcul de $\sin x$ et $\cos x$ :

  Soit $\alpha$ l'angle géométrique aigu défini par $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ , alors $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

  D'où : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , $\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $A = \frac{7\sqrt{5}}{10}$ .

b) • Localisation de $P(\varphi)$ :

$65\pi < 2\varphi < 67\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{65\pi}{2} < \varphi < \frac{67\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad P(\varphi) \in II \cup III\,.$

Or $\sin\varphi < 0$ donc $P(\varphi) \in III\,.$

On en déduit donc que $\cos\varphi < 0$ et $\tan\varphi > 0\,.$

• Calcul de $\cos\varphi$ et $\tan\varphi$ :

Soit $\alpha$ l'angle géométrique aigu défini par $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}\,,$

alors $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\tan\alpha = \frac{2}{3}\,.$

D'où : $\cos\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}\,, \quad \tan\varphi = +\frac{2}{3} \quad$ et $\quad B = -26\,.$

**4.** Comparer, sans machine, les angles $\alpha$ et $\beta$ dans les trois cas suivants :

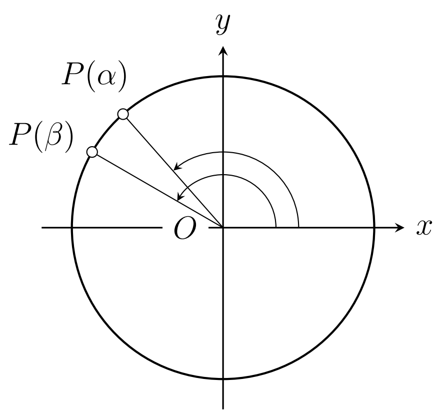
a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}\,, \quad \alpha \in [\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\,]$ et $\beta = \frac{5\pi}{6}\,.$

b) $\cos\alpha = \frac{2}{5}\,, \quad \alpha \in [\,0\,,\,\pi\,]$ et $\beta = \frac{\pi}{3}\,.$

c) $\tan\alpha = -2\,, \quad \alpha \in \,]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$ et $\beta = -\frac{\pi}{3}\,.$

---

a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}\,, \quad \alpha \in [\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\,]$ et $\beta = \frac{5\pi}{6}\,.$



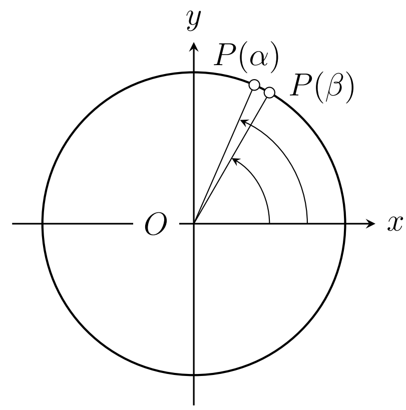

$\beta$ est un angle remarquable, on connaît son sinus : $\sin\beta = \frac{1}{2}\,.$

D'où : $\sin\alpha > \sin\beta\,.$

Or la fonction sinus, sur l'intervalle $[\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\,]$, est décroissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, le sinus diminue).

Donc $\alpha < \beta\,.$

b) $\cos\alpha = \frac{2}{5}\,, \quad \alpha \in [\,0\,,\,\pi\,]$ et $\beta = \frac{\pi}{3}\,.$



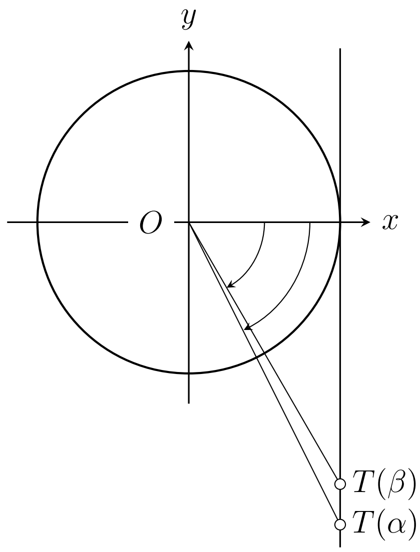

$\beta$ est un angle remarquable, on connaît son cosinus : $\cos\beta = \frac{1}{2}\,.$

D'où : $\cos\alpha < \cos\beta\,.$

Or la fonction cosinus, sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$, est décroissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, le cosinus diminue).

Donc $\alpha > \beta\,.$

c) $\tan\alpha = -2\,, \quad \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\, \frac{\pi}{2}\right[ \quad$ et $\quad \beta = -\frac{\pi}{3}\,.$




$\beta$ est un angle remarquable, on connaît sa tangente : $\tan\beta = -\sqrt{3}\,.$

D'où : $\tan\alpha < \tan\beta\,.$

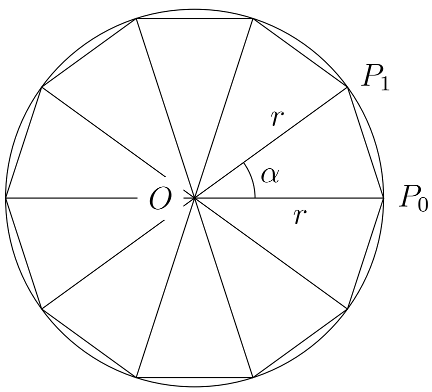
Or la fonction tangente, sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\, \frac{\pi}{2}\right[$, est croissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, la tangente augmente).

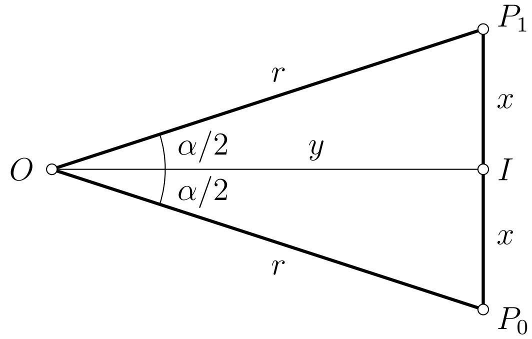
Donc $\alpha < \beta\,.$

**5.** Un polygone régulier de $n$ côtés est inscrit dans un cercle de rayon $r$.
Calculer le périmètre $P$ et l'aire $A$ de ce polygone en fonction de $r$ et de $n$.

---

Figure d'étude




Le polygone étant régulier, on peut le décomposer en $n$ triangles isométriques.

On en déduit la valeur de l'angle $\alpha$ : $\quad \alpha = \dfrac{2\pi}{n}\,.$

Ces triangles sont isocèles, la hauteur $OI$ est donc aussi une bissectrice et une médiane.

On en déduit l'expression de $x = P_0I$ et de $y = OI$ :

$$\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{r} \qquad \Rightarrow \qquad x = r\,\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \frac{y}{r} \qquad \Rightarrow \qquad y = r\,\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

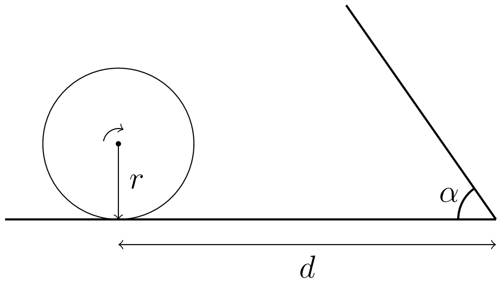
- Soit $P$ le périmètre du polygone : $P = n \cdot P_0P_1 = 2\,n\,x = 2\,n\,r\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$P = 2\,n\,r\,\sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\,.$$

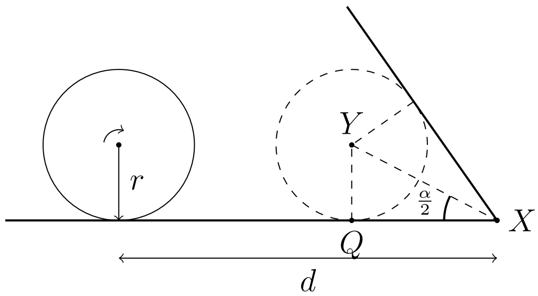
- Soit $A$ l'aire du polygone : $A = n\,x \cdot y = n\,r^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$A = n\,r^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) .$$

**6.** Une roue part d'une position initiale, jusqu'à toucher un mur incliné. En fonction des données $(r, d, \alpha)$, calculer l'angle $\beta$ dont la roue aura tourné au moment ou elle entre en contact avec le mur incliné.




Observons la position de la roue au moment du contact:




On remarque qu'au moment du contact, la distance parcourue par le centre de la roue sera de $d - |QX|$, et qu'elle aura donc tourné d'un angle de

$$\beta = \frac{d - |QX|}{r} .$$

En considérant le triangle $YXQ$, on voit que

$$\tan(\alpha/2) = \frac{|YQ|}{|QX|} = \frac{r}{|QX|} ,$$

et donc $|QX| = \dfrac{r}{\tan(\alpha/2)}$ .

On a donc

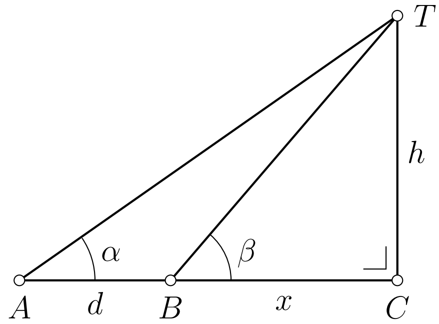
$$\beta = \frac{d - \frac{r}{\tan(\alpha/2)}}{r} .$$

**7.** Pour déterminer la hauteur d'une tour, on vise son sommet depuis un point au sol, avec un angle d'élévation $\alpha$ ; puis on s'avance d'une distance $d$ vers le pied de la tour et on effectue une deuxième visée avec un angle $\beta$.

Calculer la hauteur $h$ de la tour en fonction de $\alpha$, $\beta$ et $d$.

---

Soit $x$ la distance entre le deuxième point de visée et le pied de la tour.




Dans le triangle rectangle $ACT$ :

$$h = (d + x)\,\tan\alpha\,.$$

Dans le triangle rectangle $BCT$ :

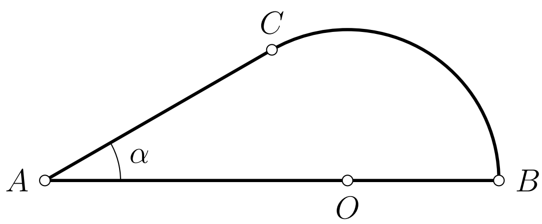
$$h = x\,\tan\beta\,.$$

On en déduit la distance $x$ puis la hauteur $h$ :

$$(d{+}x)\,\tan\alpha = x\,\tan\beta \quad\Leftrightarrow\quad x = d\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}\,, \qquad \text{d'où} \qquad h = d\cdot\frac{\tan\alpha\,\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}\,.$$

**8.** La figure ci-jointe est constituée d'un segment $AB$, d'un arc de cercle $(BC)$ de centre $O$ et du segment $AC$ tangent à l'arc $(BC)$ en $C$.

On connaît les mesures suivantes : $AB = 18\,\text{cm}$ et $\alpha = 30°$.



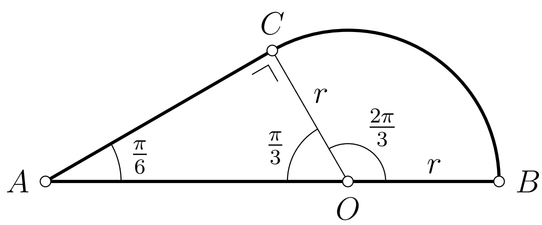

Calculer le périmètre $P$ et l'aire $A$ de cette figure.

---

- Calcul du rayon $r$ :

  Pour calculer le rayon $r$, on l'exprime en fonction des données $\alpha$ et $AB$.

  $AB = AO + r$, avec $AO = \dfrac{r}{\sin\alpha}$,




$$AB = r\left(\frac{1}{\sin\alpha} + 1\right) \quad\Leftrightarrow\quad r = \frac{AB}{\frac{1}{\sin\alpha} + 1} \quad\Leftrightarrow\quad r = 6\,\text{cm}.$$

- Calcul de $AC$ :

$$\tan\alpha = \frac{r}{AC} \quad\Leftrightarrow\quad AC = \frac{r}{\tan\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad AC = 6\sqrt{3} \approx 10,4\,\text{cm}\,.$$

- Calcul du périmètre $P$ :

  L'arc $BC$ est de mesure $\beta = \frac{2\pi}{3}$ radians.

  Sa longueur vaut donc $\beta \cdot r = 4\pi\,\mathrm{cm}$.

  $P = 3\,r + \beta\,r + r\,\sqrt{3} = r\,(3 + \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\,) \approx 41\,\mathrm{cm}.$

- Calcul de l'aire $A$ :

  Aire du triangle $AOC$ : $\frac{1}{2}\,r \cdot AC = 18\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

  Aire du secteur circulaire $OBC$ : $\frac{1}{2}\,\beta \cdot r^2 = 12\pi\,\mathrm{cm}^2$.

  D'où l'aire $A$ du domaine : $A = 18\sqrt{3} + 12\pi \approx 68,9\,\mathrm{cm}^2$.