Corrigé 1

1. Sans utiliser de calculatrice, convertir

a) $\alpha = 240°$ en radians, b) $\beta = 1$ rad en degrés et minutes, (poser $\pi = \frac{22}{7}$).

---

a) A partir de la relation fondamentale $360° = 2\pi$ radians, travaillez par proportionalité.

$$360° = 2\pi \text{ rad}\,, \qquad 60° = \frac{\pi}{3} \text{ rad}\,, \qquad 240° = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}\,.$$

b) Ce problème de conversion de radians en degrés se résout à partir de la relation fondamentale

$$2\pi \text{ radians} = 360°\,.$$

$$2 \cdot \frac{22}{7} \text{ radians} = 360°\,, \qquad 1 \text{ radian} = \frac{7}{44} \cdot 360° = \frac{7}{11} \cdot 90° = \frac{630°}{11}\,.$$

Il s'agit d'exprimer cette fraction de degrés en degrés et minutes.
Pour cela, on effectue une division euclidienne (division entière avec reste).

$$1 \text{ radian} = \frac{630°}{11} = 57° + \frac{3°}{11}\,,$$

avec

$$\frac{3°}{11} = \frac{3 \cdot 60'}{11} = \frac{180'}{11} = 16' + \frac{4'}{11}\,.$$

D'où

$$1 \text{ radian} \approx 57°\, 16'.$$

2. Un polygone régulier de n côtés et de sommets A_1, $A_2, \cdots$, A_n est inscrit dans un cercle.

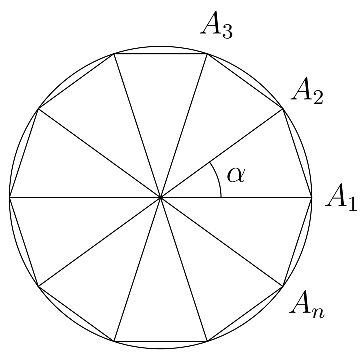
Exprimer en radians la mesure des arcs (A_1A_k), $k = 2, \cdots, n$.

Le cercle est un arc dont la mesure est 2π rad.

Le polygone à n côtés étant régulier, les n arcs (A_1A_2), (A_2A_3), $\cdots$, (A_nA_1) sont isométriques et ont pour mesure $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ rad.

L'arc (A_1A_k) est composé de $(k-1)$ arcs élémentaires (A_1A_2), $\cdots$, $(A_{k-1}A_k)$;

sa mesure est donc : $(k-1)\,\alpha = (k-1) \cdot \dfrac{2\pi}{n}$ rad.



3. a) Un arc de cercle a pour longueur $L = 30\,\text{cm}$, son angle au centre mesure $\alpha = 4$ rad. Calculer son rayon r.

b) Un secteur circulaire a pour angle au centre $\beta = 18°$ et pour rayon $r = 12\,\text{cm}$. Calculer la longueur L de l'arc et l'aire A du secteur.

---

a) $L = \alpha \cdot r$ où α est la mesure de l'arc exprimée en radian.

$$r = \frac{L}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{30}{4} = 7,5\,\text{cm}.$$

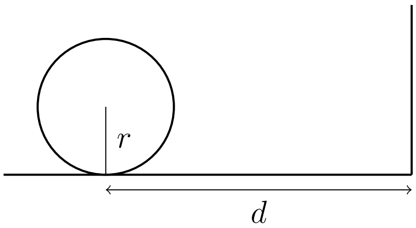
b) La mesure de l'arc est ici exprimée en degrés, il faut la convertir en radians :

$$\beta = 18° = \frac{180°}{10} = \frac{\pi}{10} \text{ rad.}$$

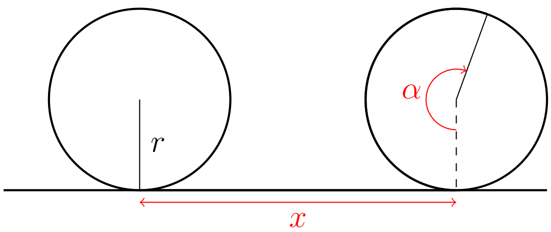
- $L = \beta \cdot r \quad \Rightarrow \quad L = \dfrac{\pi}{10} \cdot 12 = \dfrac{6\pi}{5}$ cm.
- $A = \dfrac{1}{2}\,\beta \cdot r^2 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\pi}{10} \cdot 12^2 = \dfrac{36\pi}{5}$ cm^2.

4. La roue ci-contre, de rayon r, a son centre situé à la distance d du mur. On la fait rouler jusqu'à ce qu'elle touche celui-ci.

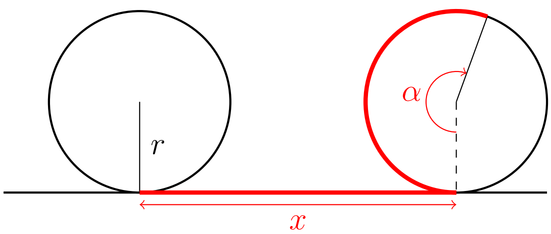
De quel angle α la roue a-t-elle tourné ?



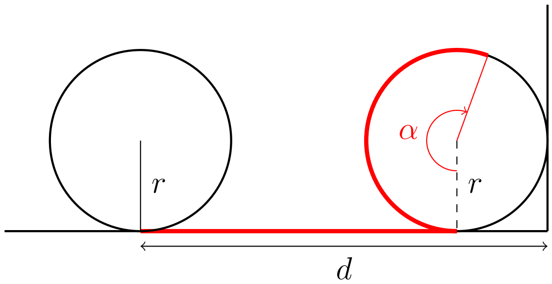
Quel est le lien entre la distance x parcourue et l'angle de rotation α ?



Cette distance x est égale à la longueur de l'arc correspondant à l'angle de rotation α.



La distance horizontale parcourue jusqu'à ce que la roue touche le mur vaut $d - r$.



Cette distance correspond à la longueur de l'arc dont l'angle au centre vaut α.

$$\alpha \cdot r = d - r \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{d - r}{r} \,.$$

5. Estimer la vitesse sur orbite de la lune dans sa course autour de la terre connaissant la distance qui les sépare : environ 360'000 km (distance du centre de la terre au centre de la lune) et en fixant une période lunaire approximativement à 30 jours.

La lune effectue une révolution autour de la terre en 30 jours ; calculons la distance parcourue durant cette période.

$$L = 2\pi \cdot R = 2\pi \cdot 360'000 \text{ km}$$

Le problème est résolu : la vitesse sur orbite de la lune est de $2\pi \cdot 360'000$ km par 30 jours.

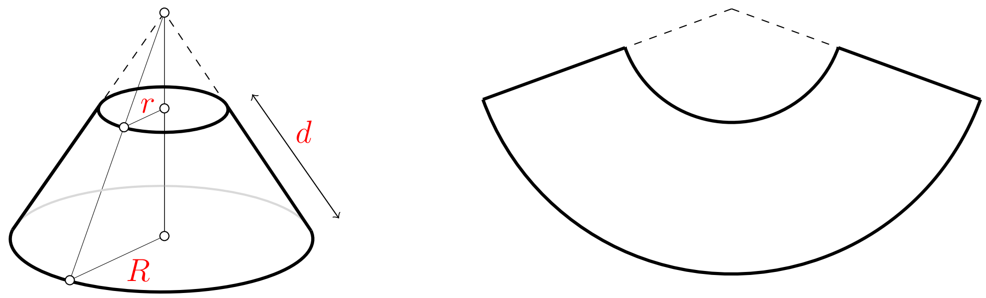
Il suffit de l'exprimer dans une unité plus conventionnelle.

$$\begin{aligned}
2\pi \cdot 360'000 \text{ km} \quad &\longleftrightarrow \quad 30 \text{ jours} \\
2\pi \cdot 360'000 \text{ km} \quad &\longleftrightarrow \quad 30 \cdot 24 \text{ heures} \\
\frac{2\pi \cdot 360'000}{30 \cdot 24} \text{ km} \quad &\longleftrightarrow \quad 1 \text{ heure} \\
\sim 3'140 \text{ km} \quad &\longleftrightarrow \quad 1 \text{ heure}
\end{aligned}$$

La vitesse sur orbite de la lune est approximativement de 3'140 km/h.

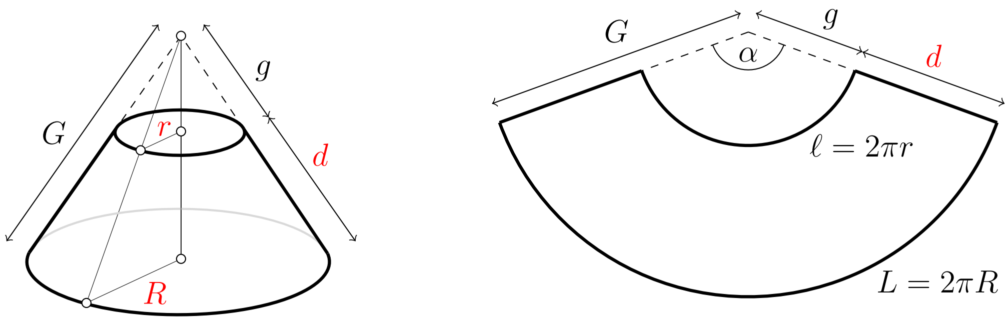
6. On considère un tronc de cône de révolution défini par les rayons r et R de ses deux bases et par la longueur g des génératrices.

Ce tronc de cône est une surface développable : en le découpant le long d'une génératrice, on obtient un secteur de couronne circulaire.



Déterminer la surface A de ce tronc de cône en fonction des données r, R et d.

Notons G la longueur des génératrices du grand cône et g celle du petit cône.



La surface A du tronc de cône s'exprime comme la différence entre le grand secteur circulaire et le petit. Soit α l'angle au centre des secteurs circulaires :

$$A \;=\; \frac{\alpha}{2}\cdot G^2 - \frac{\alpha}{2}\cdot g^2 \;=\; \frac{\alpha}{2}\cdot\left(G^2 - g^2\right) \;=\; \frac{\alpha}{2}\cdot(G+g)\cdot(G-g)\;,$$

$$A \;=\; \frac{\alpha}{2}\cdot(G+g)\cdot d\,.$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires sont les circonférences des bases :

$$\ell = \alpha\cdot g = 2\pi\, r \qquad \text{et} \qquad L = \alpha\cdot G = 2\pi\, R\,,$$

on en déduit l'expression de α en fonction de r et g ou de R et G :

$$\alpha = \frac{2\pi\, r}{g} = \frac{2\pi\, R}{G}\,.$$

$$A \;=\; \frac{\pi\, R}{G}\cdot(G+g)\cdot d \;=\; \pi\, R\cdot\frac{G+g}{G}\cdot d \;=\; \pi\, R\cdot\left(1+\frac{g}{G}\right)\cdot d\,.$$

Or d'après Thalès, le rapport des génératrices est égal au rapport des rayons :

$$\frac{g}{G} = \frac{r}{R}\,,$$

$$A \;=\; \pi\, R\cdot\left(1+\frac{r}{R}\right)\cdot d \;=\; \pi\cdot(R+r)\cdot d \;=\; \underbrace{2\pi\;\cdot\;\underbrace{\frac{r+R}{2}}_{\text{rayon moyen}}}_{\text{circonférence moyenne}}\;\cdot\; d\,.$$

7. Il est midi. Sur une montre analogique, l'aiguille des heures et celle des minutes sont superposées.

a) A quels instants (heures, minutes, secondes) le seront-elles de nouveau ?

Indication : déterminer $\alpha_1(t)$, l'angle décrit par l'aiguille des heures en t secondes et $\alpha_2(t)$, l'angle décrit par l'aiguille des minutes.

b) Même question avec les trois aiguilles , celle des heures, des minutes et des secondes.

---

a)

- Soit $\alpha_1(t)$ l'angle parcouru en t secondes par l'aiguille des heures.
  - Pour une valeur de t positive, la mesure de l'angle α_1 est négative car le mouvement des aiguilles d'une montre s'effectue dans le sens trigonométrique négatif.
  - D'autre part, l'aiguille des heures effectue un tour complet en 12 heures.

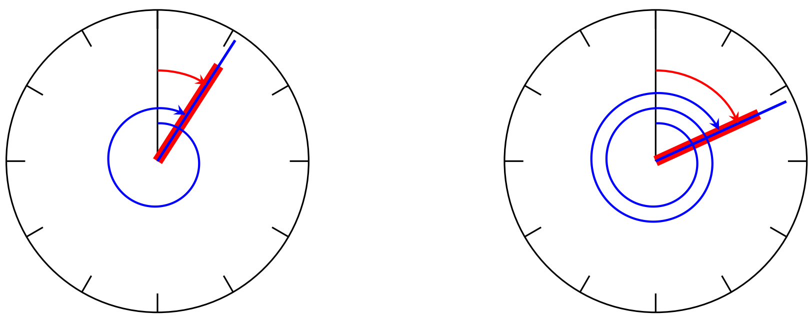
$$\begin{array}{rcl} 12 \text{ heures} & \longleftrightarrow & -2\pi \text{ radians} \\ 12 \cdot 60^2 \text{ secondes} & \longleftrightarrow & -2\pi \text{ radians} \\ 1 \text{ seconde} & \longleftrightarrow & -\dfrac{2\pi}{12 \cdot 60^2} \text{ radians} \\ t \text{ secondes} & \longleftrightarrow & -\dfrac{2\pi}{12 \cdot 60^2}\, t \text{ radians.} \end{array}$$

D'où l'expression cherchée : $\alpha_1(t) = -\dfrac{2\pi}{12 \cdot 60^2}\, t\,.$

- De façon analogue, on en déduit que l'angle décrit par l'aiguille des minutes en t secondes est donné par

$$\alpha_2(t) = -\frac{2\pi}{60^2}\, t\,.$$

- Les deux aiguilles se superposent au temps t si les deux angles diffèrent d'un nombre entier de tours (si les deux angles sont des déterminations différentes d'un même angle orienté).



$$\alpha_1(t) - \alpha_2(t) = 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

$$-\frac{2\pi}{12\cdot 60^2}\,t+\frac{2\pi}{60^2}\,t=2k\pi \quad\Leftrightarrow\quad t\left(-\frac{1}{12\cdot 60^2}+\frac{1}{60^2}\right)=k$$

$$t\left(\frac{11}{12\cdot 60^2}\right)=k \quad\Leftrightarrow\quad t=k\left(\frac{12\cdot 60^2}{11}\right)\ \text{secondes}$$

$$t=k\left(\frac{11\cdot 60^2}{11}+\frac{60^2}{11}\right)=k\left(\frac{11\cdot 60^2}{11}+\frac{55\cdot 60}{11}+\frac{5\cdot 60}{11}\right)\ \text{secondes}$$

$$t\approx k\,(1\text{h }5'\ 27''\,)\,,\quad k\in\mathbb{N}^*.$$

b) Soit $\alpha_3(t)$ l'angle parcouru en t secondes par l'aiguille des secondes :

$$\alpha_3(t)=-\frac{2\pi}{60}\,t\,.$$

Les trois aiguilles se superposent au temps t si les trois angles diffèrent d'un nombre entier de tours.

$$\begin{cases}\alpha_1(t)-\alpha_2(t)=2k\pi\\ \alpha_2(t)-\alpha_3(t)=2\ell\pi\end{cases}\qquad k,\ell\in\mathbb{N}^*.$$

$$\begin{cases}-\dfrac{2\pi}{12\cdot 60^2}\,t+\dfrac{2\pi}{60^2}\,t=2k\pi\\ -\dfrac{2\pi}{60^2}\,t+\dfrac{2\pi}{60}\,t=2\ell\pi\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-t+12\,t=k\cdot 12\cdot 60^2\\ -t+60\,t=\ell\cdot 60^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}t=\dfrac{12}{11}\cdot 60^2\cdot k\\ t=\dfrac{1}{59}\cdot 60^2\cdot \ell\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{12\,k}{11}=\frac{\ell}{59}\quad\Leftrightarrow\quad 12\cdot 59\,k=11\,\ell\,.$$

La première rencontre des trois aiguilles a lieu lorsque

$$(k\,,\ \ell)=(11\,,\ 12\cdot 59)$$

car les deux nombres 11 et $12\cdot 59$ sont premiers entre eux.

Or $k=11 \quad\Leftrightarrow\quad t=12\cdot 60^2$ secondes $=12$ heures.

Les trois aiguilles sont de nouveau superposées à minuit : cela n'est pas une surprise !

Mais ce que nous venons de démontrer c'est qu'il n'y a pas de superposition des trois aiguilles de la montre entre midi et minuit.

8. Sur une piste circulaire, deux personnes prennent simultanément le départ en un même point A.

La première personne court à vitesse constante et effectue un tour complet en 60 secondes et la deuxième part en sens inverse, à vitesse constante et fait un tour en 250 secondes.

a) Déterminer l'instant t_n où les deux coureurs se rencontrent pour la n-ième fois.

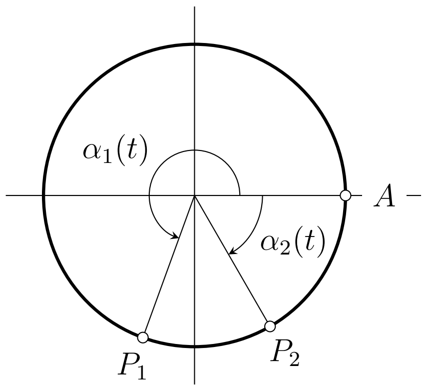
b) Déterminer l'instant t_A où les deux personnes se rencontrent pour la première fois au point de départ A.

Soit $\alpha_1(t)$ l'angle parcouru en t secondes $(t > 0)$ par la première personne :

$$\alpha_1(t) = \frac{2\pi}{60}\, t = \frac{\pi}{30}\, t\,.$$

Soit $\alpha_2(t)$ l'angle parcouru en t secondes par la deuxième personne :

$$\alpha_2(t) = -\frac{2\pi}{250}\, t = -\frac{\pi}{125}\, t\,.$$



a) Les deux coureurs se rencontrent au temps t si les deux angles diffèrent d'un nombre entier de tours.

Plus précisément, ils se rencontrent pour la n-ième fois si les deux angles diffèrent de n tours.

$$\alpha_1(t_n) - \alpha_2(t_n) = 2\,n\,\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{30}\, t_n - \Big(-\frac{\pi}{125}\, t_n\Big) = 2\,n\,\pi\,, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$t_n = n \cdot \frac{1500}{31} \text{ secondes}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

b) • Une méthode

Les deux coureurs se rencontrent au point de départ A, au temps t $(t > 0)$, si les deux angles correspondent à des nombres entiers de tours.

$$\alpha_1(t) = 2\,k\,\pi \qquad \text{et} \qquad \alpha_2(t) = 2\,\ell\,\pi\,, \qquad k\,,\, \ell \in \mathbb{Z} \quad (\,k > 0 \quad \text{et} \quad \ell < 0\,)\,.$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{30}\, t = 2\,k\,\pi \\ -\frac{\pi}{125}\, t = 2\,\ell\,\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = 60\,k \\ t = -250\,\ell \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 6\,k = -25\,\ell\,.$$

La première rencontre au point de départ A a lieu pour $k = 25$ et $\ell = -6$, ce qui correspond à :

$t_A = 60\,k = -250\,\ell = 60 \cdot 25$ secondes $= 25$ minutes.

- Une autre méthode qui utilise le résultat de la partie a).

  Les deux coureurs se rencontrent au point de départ A, s'ils se rencontrent et que l'un d'eux est au point A.

  - Les deux coureurs se rencontrent pour la n-ième fois si et seulement si
  $$t = n \cdot \frac{1500}{31} \text{ secondes}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$
  - Le coureur n° 1 est au point A si et seulement si il a effectué un nombre entier de tours. En d'autres termes, si et seulement si
  $$\alpha_1(t) = 2k\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$
  $$\alpha_1(t) = 2k\,\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{60}\,t = 2\,k\,\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = 60\,k\,, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$
  - Détermination de k et n
  $$\begin{cases} t = 60\,k \\ t = n \cdot \frac{1500}{31} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 60\,k = n \cdot \frac{1500}{31} \quad \Leftrightarrow \quad 31\,k = 25\,n\,.$$
  Or 25 et 31 sont premiers entre eux, donc toutes les solutions sont de la forme
  $$(k\,,\,n) = \lambda\,(25\,,\,31)\,, \quad \lambda \in \mathbb{N}^*.$$
  - Conclusion

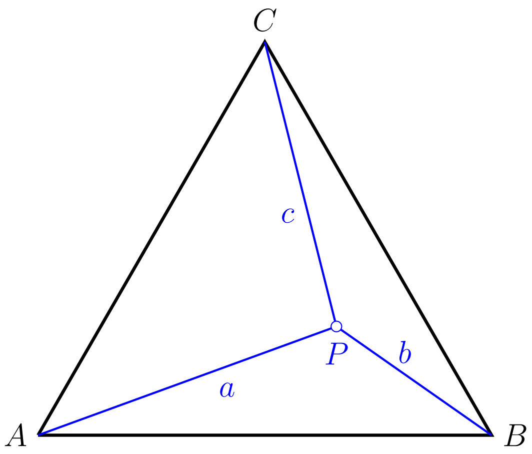
    La première rencontre au point de départ A a lieu pour $k = 25$ et $n = 31$, ce qui correspond à :
  $$t_A = 60\,k = 60 \cdot 25 \text{ secondes} = 25 \text{ minutes}\,.$$

9. Exercice récréatif

On considère un triangle équilatéral ABC et un point P quelconque à l'intérieur du triangle. On note $a = PA$, $b = PB$ et $c = PC$.

Montrer que quelle que soit la position de P dans le triangle ABC, on peut construire un triangle dont les côtés sont de longueur a, b et c.

Indication : utiliser une rotation pour construire le triangle demandé.



En effectuant une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, (c'est une isométrie), on transforme le triangle équilatéral ABC en un triangle isométrique $A'B'C'$. Le point P a pour image P' et le segment $B'P'$ a donc pour longueur b. D'autre part, le triangle APP' est équilatéral, le segment PP' est donc de longueur a.

Le triangle PCP' est donc le triangle cherché.