Corrigé 10

1. Pour chaque fonction f ci-dessous, donner le nombre dérivé $f'(x_0)$ pour tout $x_0 \in D_f$ en calculant la limite du rapport de Newton.

a) $f(x) = \cos(x)$
b) $f(x) = \cot(x)$
c) $f(x) = \sin(2x)$
d) $f(x) = \sin(3x)$
e) $f(x) = \cos^3(x)$
f) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

On calcule les rapports de Newton en x_0 :

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{-2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0}\\ &= -\lim_{x\to x_0} \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\\ &= -\sin(x_0)\cdot 1 = -\sin(x_0)\end{aligned}$$

où on a utilisé l'IPE du sinus

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

D'où on a $f'(x_0) = -\sin(x_0)$.

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{\cot(x)-\cot(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{\tan(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{\tan(x_0)-\tan(x)}{\tan(x)\tan(x_0)}}{x-x_0}\\ &= -\lim_{x\to x_0} \frac{\tan(x)-\tan(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\tan(x)\tan(x_0)}\\ &= -\tan'(x_0)\cdot \frac{1}{\tan^2(x_0)}\\ &= \frac{-1-\tan^2(x_0)}{\tan^2(x_0)}\\ &= -\cot^2(x_0) - 1 = \frac{-1}{\sin^2(x_0)}\end{aligned}$$

D'où $f'(x_0) = -1-\cot^2(x_0) = \dfrac{-1}{\sin^2(x_0)}$.

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(2x)-\sin(2x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} 2\frac{\cos\left(\frac{2x+2x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-2x_0}{2}\right)}{x-x_0}\\ &= 2\lim_{x\to x_0}\cos(x+x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\\ &= 2\cos(2x_0)\cdot 1 = 2\cos(2x_0)\end{aligned}$$

D'où $f'(x_0) = 2\cos(2x_0)$.

d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(3x)-\sin(3x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} 2\frac{\cos\left(\frac{3x+3x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-3x_0}{2}\right)}{x-x_0}\\ &= 2\lim_{x\to x_0}\cos\left(\frac{3x+3x_0}{2}\right)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{3}{2}(x-x_0)\right)}{x-x_0}\\ &= 2\lim_{x\to x_0}\cos\left(\frac{3x+3x_0}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{3}{2}(x-x_0)\right)}{\frac{3}{2}(x-x_0)}\\ &= 3\cos(3x_0)\cdot 1 = 3\cos(3x_0)\end{aligned}$$

D'où $f'(x_0) = 3\cos(3x_0)$.

e)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\cos^3(x)-\cos^3(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0}\cdot\left(\cos^2(x)+\cos(x)\cos(x_0)+\cos^2(x_0)\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\left(\cos^2(x)+\cos(x)\cos(x_0)+\cos^2(x_0)\right)\\ &= -\sin(x_0)\cdot 3\cos^2(x_0)\end{aligned}$$

D'où $f'(x_0) = -3\cos^2(x_0)\sin(x_0)$.

f) On calcule

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\arctan\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x-x_0} = \lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{\frac{1}{\tan(y)}-\frac{1}{\tan(y_0)}}$$

où on a effectué le changement de variable :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = y \iff x = \frac{1}{\tan(y)},\quad \arctan\left(\frac{1}{x_0}\right) = y_0 \iff x_0 = \frac{1}{\tan(y_0)}$$

$$y, y_0 \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\},\quad x, x_0\in\mathbb{R}^*.$$

On calcule à présent

$$\lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{\frac{1}{\tan(y)}-\frac{1}{\tan(y_0)}} = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{\frac{\tan(y_0)-\tan(y)}{\tan(y)\tan(y_0)}} = -\lim_{y\to y_0} \frac{\tan(y)\tan(y_0)}{\frac{\tan(y)-\tan(y_0)}{y-y_0}}$$
$$= -\frac{\tan^2(y_0)}{\tan'(y_0)} = -\frac{\tan^2(y_0)}{1+\tan^2(y_0)}.$$

Finalement on aura donc

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\arctan\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x-x_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{\frac{1}{\tan(y)}-\frac{1}{\tan(y_0)}}$$
$$= -\frac{\tan^2(y_0)}{1+\tan^2(y_0)} = \frac{-1}{x_0^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x_0^2}}$$
$$= \frac{-1}{x_0^2}\frac{x_0^2}{1+x_0^2} = \frac{-1}{1+x_0^2}.$$

D'où $f'(x_0) = \dfrac{-1}{1+x_0^2}$.

---

2. Pour chaque paire de fonctions f et g ci-dessous, montrer que f et g sont des IPE autour de $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \arcsin(x)$ et $g(x) = x$

b) $f(x) = \arccos(x) - \frac{\pi}{2}$ et $g(x) = -x$

c) $f(x) = \arctan(\sin(x))$ et $g(x) = \sin(x)$

---

a) On a bien que $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$. De plus on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)-0}{x-0}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)-\arcsin(0)}{x-0}$$
$$= \arcsin'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1.$$

b) On a bien que $\lim\limits_{x\to 0} \arccos(x) - \dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$. De plus on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}}{-x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\arccos(x)-\arccos(0)}{x-0}$$
$$= -\arccos'(0) = -\frac{-1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$

c) On a bien que $\lim_{x\to 0} \arctan(\sin(x)) = \lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$. De plus on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(\sin(x))}{\sin(x)} &= \lim_{y\to 0} \frac{\arctan(y)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\arctan(y) - \arctan(0)}{y-0} \\ &= \arctan'(0) \\ &= 1.\end{aligned}$$

---

3. On considère les deux fonctions $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$ et $g(x) = \arctan(x) + \dfrac{\pi}{2}$.

a) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point $(0, f(0))$.
b) Donner l'équation de la tangente au graphe de g au point $(0, g(0))$.
c) Montrer que ces deux droites sont orthogonales.
Indication : que vaut le produit des pentes ?

On rappelle que l'équation de la tangente au graphe d'une fonction f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

De plus, deux droites concourrantes sont orthogonales si le produit de leur pentes vaut -1.

a) L'équation de la tangente à G_f au point $(0, f(0)) = (0, \frac{\pi}{2})$ est donnée par

$$t_f : y = f(0) + f'(0)(x-0) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arccot}'(0)x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+0^2} = \frac{\pi}{2} - x.$$

b) L'équation de la tangente à G_g au point $(0, g(0)) = (0, \frac{\pi}{2})$ est donnée par

$$t_g : y = g(0) + g'(0)(x-0)$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) + \frac{\pi}{2} - \arctan(0) - \frac{\pi}{2}}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x-0} \\ &= \arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1.\end{aligned}$$

D'où

$$t_g : \frac{\pi}{2} + x.$$

c) Le produit des pentes valant -1, les deux tangentes sont bien orthonogales.

---

4. Donner l'équation de la droite normale au graphe de la fonction $f(x) = 3\sin(2x)$ au point $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{3}{2}\right)$.

Indication : la droite normale à un graphe de fonction au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite perpendiculaire en ce point à la tangente au graphe.

On observe que
$$\left(\frac{\pi}{12}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{12}, f\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = A.$$

On commence par chercher la tangente à G_f au point A. Son équation est donnée par
$$t : y = f\left(\frac{\pi}{12}\right) + f'\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(x - \frac{\pi}{12}\right).$$

On calcule que $f'(x_0) = 6\cos(2x_0)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 3 \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(2x) - \sin(2x_0)}{x - x_0} \\ &= 3(\sin(2x_0))' \underbrace{=}_{\text{exercice 1}} 3 \cdot 2\cos(2x_0) = 6\cos(2x_0). \end{aligned}$$

D'où $f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\sqrt{3}$ et l'équation de t est donnée par
$$t : y = \frac{3}{2} + 3\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{12}\right).$$

La droite normale n au point A a pour pente $m_n = \frac{-1}{m_t}$ où m_t est la pente de la tangente t, comme les deux droites sont orthogonales. Son équation est donc
$$n : y = \frac{3}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{12}\right).$$

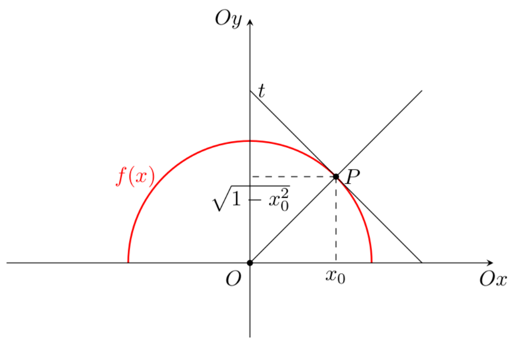
---

5. On décrit le demi-cercle supérieur du cercle trigonométrique comme le graphe de la fonction f définie par
$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1].$$

En s'aidant d'un dessin, et sans calculer le nombre $f'(x_0)$, donner la pente de la tangente t au graphe G_f au point $(x_0, f(x_0))$ pour tout $x_0 \in]-1,1[$. En déduire la valeur de $f'(x_0)$.

Indication : commencer par calculer la pente de la droite reliant l'origine au point $(x_0, f(x_0))$.

On représente la situation dans la figure ci-dessous :



La droite radiale OP est orthogonale à la tangente t au cercle au point $P = (x_0, \sqrt{1-x_0^2})$. La pente de OP est par construction donné par

$$m = \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0}.$$

Comme t et OP sont orthogonales, le produit de leur pentes vaut -1 et donc

$$m_t = \frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

Comme le nombre dérivé $f'(x_0)$ vaut la pente de la tangente au graphe d'une fonction f au point $(x_0, f(x_0))$, on trouve alors

$$f'(x_0) = m_t = \frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$
