

## Corrigé 9

1. Déterminer le domaine de définition, puis résoudre l'équation suivante :

$$2 \arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$


---

- $D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, \frac{x}{4} \in [-1, 1] \text{ et } \frac{x^2-2}{x^2} \in [-1, 1] \right\}.$ 
  - $\frac{x}{4} \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in [-4, 4].$
  - $-1 \leq \frac{x^2-2}{x^2} \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2-2 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$
  - $\frac{x^2-2}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2-2 \leq x^2 \Leftrightarrow -2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*.$

L'intersection des trois domaines donne  $D_{\text{def}} = [-4, -1] \cup [1, +4].$

- Posons  $\alpha = \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$  et  $\beta = \arcsin\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right).$

$$\alpha \in [0, \pi] \text{ et } \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ d'où } 2\alpha + \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right].$$

L'équation  $2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$  a donc bien un sens car  $\frac{3\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right].$

- Résolution de l'équation  $2 \arccos\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$

On cherche à "se débarrasser" des fonctions arc en appliquant la fonction sinus ou la fonction cosinus aux deux membres de cette équation.

Mais quelle fonction choisir ? L'une donne un résultat simple et l'autre débouche sur une équation compliquée et désagréable à résoudre.

Il faut faire le bon choix !

- En prenant le sinus des deux membres de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\alpha = \frac{3\pi}{2} - \beta &\Rightarrow \sin(2\alpha) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\cos \beta \\ &\Leftrightarrow 2 \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2} = -\sqrt{1 - \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

- En prenant le cosinus des deux membres de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\alpha = \frac{3\pi}{2} - \beta &\Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \\ &\Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\sin \beta \\ &\Leftrightarrow 2 \left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{x^2-2}{x^2}. \end{aligned}$$

La deuxième méthode est évidemment la plus agréable.

Mais attention ! En appliquant une fonction trigonométrique aux deux membres de cette équation, **on perd l'équivalence**, car ces fonctions ne sont pas injectives. On introduit peut-être des solutions parasites.

- Résolution de l'équation associée :

$$2 \left( \frac{x}{4} \right)^2 - 1 = -\frac{x^2 - 2}{x^2} \Leftrightarrow x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \in D_{\text{def}}.$$

Les deux valeurs obtenues  $x = -2$  et  $x = 2$  sont des "candidats-solutions" (vraies solutions ou solutions parasites ?)

- On teste ces deux valeurs dans l'équation initiale :

$$\circ x = -2 : 2 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\circ x = +2 : 2 \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \neq \frac{3\pi}{2}$$

Donc seul  $x = -2$  est solution,  $S = \{-2\}$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les trois équations suivantes :

a)  $\frac{\pi}{4} + \arctan(2x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(3x)$

b)  $2 \arctan\left(x + \frac{1}{2}\right) + \arctan(2x - 1) = \frac{\pi}{2}$

c)  $\arcsin x + \arcsin(2x) - \arccos(\sqrt{3}x) = \frac{\pi}{2}$

a)  $\frac{\pi}{4} + \arctan(2x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(3x), \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$

On pose  $\alpha = \arctan(2x)$  et  $\beta = \arctan(3x)$ .

L'équation devient :  $\frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - \beta \Rightarrow \tan \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right).$

Attention ! D'une part, la fonction tangente est **non injective**, mais d'autre part, elle n'est pas définie sur tout  $\mathbb{R}$ .

$$\tan \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \beta}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \beta} \Leftrightarrow 2x = \frac{1 - 3x}{1 + 3x}, \quad x \neq -\frac{1}{3}.$$

La valeur interdite  $x = -\frac{1}{3}$  coïncide avec la valeur interdite  $\beta = -\frac{\pi}{4}$ .

Cette valeur est peut-être solution, il faut la tester dans l'équation initiale :

$$\arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + \arctan(-1) < 0 \quad \text{donc} \quad \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + \arctan(-1) \neq \frac{\pi}{4}.$$

Donc  $x = -\frac{1}{3}$  n'est pas solution. On cherche des solutions dans  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$  :

$$2x = \frac{1-3x}{1+3x} \Leftrightarrow 6x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(6x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{6},$$

On teste ces deux "candidats-solutions" dans l'équation initiale :

$$\circ x = -1 : \underbrace{\arctan(-2)}_{<0} + \underbrace{\arctan(-3)}_{<0} \neq \frac{\pi}{4}.$$

$$\circ x = \frac{1}{6} : \text{soient } \alpha = \arctan \frac{1}{3} \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \beta = \arctan \frac{1}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$\alpha + \beta \in [0, \pi] \text{ et } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Seul  $x = \frac{1}{6}$  est donc solution,  $S = \{\frac{1}{6}\}$ .

$$\text{b) } 2 \arctan(x + \frac{1}{2}) + \arctan(2x - 1) = \frac{\pi}{2}, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$$

On pose  $\alpha = \arctan(x + \frac{1}{2})$  et  $\beta = \arctan(2x - 1)$ .

L'équation devient :  $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$$\Rightarrow \tan(2\alpha) = \tan(\frac{\pi}{2} - \beta) \Leftrightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\tan \beta}, \quad 2\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2} \text{ et } \beta \neq 0.$$

Attention ! D'une part, la fonction tangente est **non injective**, mais d'autre part, elle n'est pas définie sur tout  $\mathbb{R}$ .

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\tan \beta} \Leftrightarrow \frac{2(x + \frac{1}{2})}{1 - (x + \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2x - 1}, \quad x \neq -\frac{3}{2} \text{ et } x \neq \frac{1}{2}.$$

Les valeurs interdites  $x = -\frac{3}{2}$  et  $x = \frac{1}{2}$  coïncident avec les valeurs interdites  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$  et  $\beta = 0$ .

Ces valeurs sont peut-être solutions, il faut les tester dans l'équation initiale :

$$\circ x = -\frac{3}{2} : 2 \arctan(-1) + \arctan(-4) < 0,$$

$$\circ x = \frac{1}{2} : 2 \arctan(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc  $x = \frac{1}{2}$  est solution.

On cherche d'éventuelles autres solutions dans  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$  :

$$\frac{2(x + \frac{1}{2})}{1 - (x + \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2x - 1} \Leftrightarrow (2x + 1)(2x - 1) = 1 - (x + \frac{1}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + x - \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})(5x + \frac{7}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{10}.$$

On teste cette valeur dans l'équation initiale :

$x = -\frac{7}{10} : 2 \arctan(-\frac{1}{5}) + \arctan(-\frac{12}{5}) < 0$ , donc  $x = -\frac{7}{10}$  n'est pas solution.

L'unique solution est  $x = \frac{1}{2}$ ,  $S = \{\frac{1}{2}\}$ .

c)  $\arcsin x + \arcsin(2x) - \arccos(\sqrt{3}x) = \frac{\pi}{2}.$

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, 1], \quad 2x \in [-1, 1] \text{ et } \sqrt{3}x \in [-1, 1]\} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Soient  $\alpha = \arcsin x$ ,  $\beta = \arcsin(2x)$  et  $\gamma = \arccos(\sqrt{3}x)$ .

L'équation s'écrit :  $\alpha + \beta - \gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \gamma$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \cos \gamma$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt{1 - (2x)^2} + 2x \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, & \text{ou} \\ \sqrt{1 - 4x^2} + 2\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

◦  $x = 0$  n'est pas solution :  $\arcsin(0) + \arcsin(0) - \arccos(0) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2},$

◦  $\sqrt{1 - 4x^2} + 2\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 1 - 4x^2 + 4(1 - x^2) + 4\sqrt{1 - 4x^2}\sqrt{1 - x^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{1 - 4x^2}\sqrt{1 - x^2} = 8x^2 - 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1 - 4x^2}\sqrt{1 - x^2} = 4x^2 - 1.$$

Donc  $4x^2 - 1 \geq 0$ , or  $x \in D_{\text{def}} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$

les seules solutions de cette équation sont donc  $x = \pm \frac{1}{2}.$

On teste ces deux valeurs dans l'équation initiale :

◦  $x = -\frac{1}{2}$  :  $\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arcsin(-1) - \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2},$

◦  $x = \frac{1}{2}$  :  $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin 1 - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$

Il n'y a donc qu'une seule solution  $x = \frac{1}{2}, \quad S = \{\frac{1}{2}\}.$

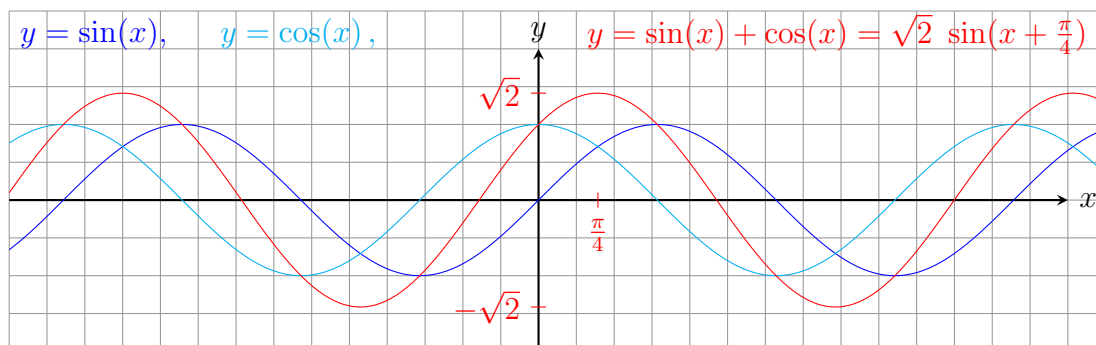
**3.** Soit la fonction  $f$  de  $A \subset \mathbb{R}$  dans  $B \subset \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin x + \cos x.$

Déterminer  $A$  et  $B$  de sorte que  $f$  soit une bijection.

Déterminer alors la fonction réciproque de  $f.$

En vue de déterminer l'ensemble  $\text{Im } f$ , on cherche à exprimer  $f$  à l'aide d'une seule fonction trigonométrique :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right] \\ &= \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x \right] \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$



On déduit donc que  $\text{Im } f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ,  $B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .

### • Une solution

On définit l'ensemble de départ  $A$  en se servant de la détermination principale du sinus : l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

La fonction  $c(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$  est injective si  $x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  :

La fonction  $f : A = [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \longrightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  est donc bijective.

$$x \longmapsto \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

Elle admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation  $y = f(x)$  par rapport à la variable  $x$  en considérant  $y$  comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or  $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$  et  $x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , donc

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \arcsin(\frac{y}{\sqrt{2}}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin(\frac{y}{\sqrt{2}}).$$

Cette fonction réciproque de  $f(x) = \sin x + \cos x$  est donc définie par

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] &\longrightarrow [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \\ x &\longmapsto -\frac{\pi}{4} + \arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

### • Une autre solution

On définit l'ensemble de départ  $A$  en se servant d'une détermination non principale du sinus : par exemple l'intervalle  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .

La fonction  $c(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$  est injective si  $x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  :

La fonction  $f : A = [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \longrightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  est donc bijective.

$$x \longmapsto \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

Elle admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation  $y = f(x)$  par rapport à la variable  $x$  en considérant  $y$  comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or  $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$  et  $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , donc

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Cette fonction réciproque de  $f(x) = \sin x + \cos x$  est donc définie par

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] &\longrightarrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \\ x &\longmapsto \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

### • Une troisième solution

On exprime  $f$  à l'aide de la fonction cosinus, puis on définit l'ensemble de départ  $A$  en se servant de la détermination principale du cosinus : l'intervalle  $[0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \sin x \\ &= \sqrt{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right] \\ &= \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x \right] \\ &= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

La fonction  $c(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  est injective si  $x - \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$  :

La fonction  $f : A = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \longrightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  est donc bijective.

$$x \longmapsto \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Elle admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation  $y = f(x)$  par rapport à la variable  $x$  en considérant  $y$  comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or  $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$  et  $x - \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$ , donc

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Cette fonction réciproque de  $f(x) = \sin x + \cos x$  est donc définie par

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] &\longrightarrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \\ x &\longmapsto \frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Remarque : il s'agit de la même fonction  $f^{-1}$  que dans la deuxième solution. seule son expression est différente.

4. Calculer  $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .

En déduire la représentation graphique de la fonction  $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  à partir de celle de la fonction  $\arctan x$ .

Localisation de  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  :

$$\alpha = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ , \quad \beta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \Rightarrow \alpha + \beta \in \left]-\pi, \pi\right[ .$$

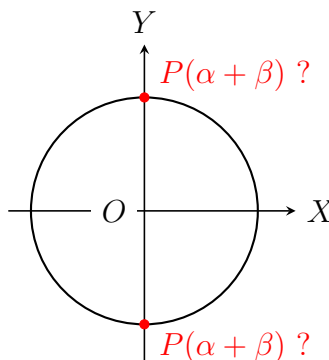
Calcul de  $\tan(\alpha + \beta)$  :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}, \quad \text{avec } \alpha = \arctan x \text{ et } \beta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le dénominateur est nul :  $1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta = 1 - x \cdot \frac{1}{x} = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ .

Donc  $\tan(\alpha + \beta)$  n'existe pas.

Or  $\alpha + \beta \in \left]-\pi, \pi\right[$  et  $\tan(\alpha + \beta)$  n'existe pas, implique que  $\alpha + \beta = \pm \frac{\pi}{2}$ .



On essaie de déterminer  $\alpha + \beta$  :

- avec un argument de signe :

$$\begin{aligned} \circ \text{ si } x < 0 : \quad \alpha + \beta &= \underbrace{\arctan(x)}_{<0} + \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{<0} = -\frac{\pi}{2}, \\ \circ \text{ si } x > 0 : \quad \alpha + \beta &= \underbrace{\arctan(x)}_{>0} + \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{>0} = +\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- Ou en calculant  $\sin(\alpha + \beta)$  :

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\
&= \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \cdot \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot |x|}{\sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \frac{x \cdot |x|}{x^2 + 1} + \frac{\frac{1}{x} \cdot |x|}{x^2 + 1} \\
&= \frac{x \cdot x \cdot \operatorname{sgn}(x)}{x^2 + 1} + \frac{\frac{1}{x} \cdot x \cdot \operatorname{sgn}(x)}{x^2 + 1} \\
&= \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \cdot \operatorname{sgn}(x) \\
&= \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

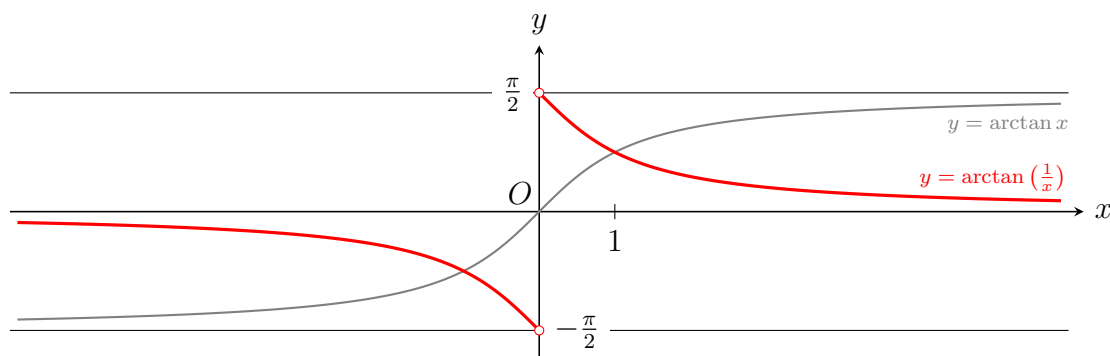
$$\text{Or } \alpha + \beta \in ]-\pi, \pi[, \quad \text{donc } \alpha + \beta = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$$\arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On en déduit l'expression de  $f(x) = \arctan \left(\frac{1}{x}\right)$  en fonction de  $\arctan x$  :

$$f(x) = \arctan \left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si } x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

puis le graphe de  $f(x) = \arctan \left(\frac{1}{x}\right)$  à partir de celui de  $\arctan(x)$  :





5. Dans un triangle  $ABC$  les angles  $\alpha, \beta, \gamma$  sont définis par

$$\alpha = \arccos(4x) \quad \beta = \arccos(-3x) \quad \gamma = \arccos(24x^2).$$

On connaît aussi le rayon  $R$  de son cercle circonscrit  $R = 25$ .

- Déterminer la valeur de  $x$  ainsi que les valeurs de  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$  et  $\sin \gamma$ .
- Calculer le rayon  $r$  du cercle inscrit du triangle  $ABC$ .

a) La somme des mesures des trois angles du triangle  $ABC$  vaut  $\pi$ .

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\cos \gamma$$

$$\Leftrightarrow (4x)(-3x) - \sqrt{1 - (4x)^2} \sqrt{1 - (-3x)^2} = -24x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - (4x)^2} \sqrt{1 - (-3x)^2} = 12x^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - 16x^2)(1 - 9x^2) = 144x^4 \Leftrightarrow 25x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{5}.$$

On teste ces deux valeurs : l'unique solution est  $x = \frac{1}{5}$ .

Et on en déduit le sinus des trois angles :

$$\circ \sin \alpha = \sin(\arccos \frac{4}{5}) = +\sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5},$$

$$\circ \sin \beta = \sin[\arccos(-\frac{3}{5})] = +\sqrt{1 - (-\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5},$$

$$\circ \sin \gamma = \sin(\arccos \frac{24}{25}) = +\sqrt{1 - (\frac{24}{25})^2} = \frac{7}{25}.$$

- Connaissant le rayon  $R$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , on en déduit la mesure des trois côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

$$a = 2R \sin \alpha = 30, \quad b = 2R \sin \beta = 40 \quad \text{et} \quad c = 2R \sin \gamma = 14.$$

Connaissant la mesure des trois côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on en déduit le rayon  $r$  du cercle inscrit au triangle  $ABC$ .

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad \text{où} \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c) = 42,$$

$$r = \sqrt{\frac{12 \cdot 2 \cdot 28}{42}} = 4.$$