

Corrigé 9

1. Déterminer le domaine de définition, puis résoudre l'équation suivante :

$$2 \arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

- $D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, \frac{x}{4} \in [-1, 1] \text{ et } \frac{x^2-2}{x^2} \in [-1, 1] \right\}.$
- $\frac{x}{4} \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in [-4, 4].$
- $-1 \leq \frac{x^2-2}{x^2} \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2-2 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$
- $\frac{x^2-2}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2-2 \leq x^2 \Leftrightarrow -2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*.$

L'intersection des trois domaines donne $D_{\text{def}} = [-4, -1] \cup [1, +4].$

- Posons $\alpha = \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$ et $\beta = \arcsin\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right).$

$\alpha \in [0, \pi]$ et $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ d'où $2\alpha + \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}].$

L'équation $2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$ a donc bien un sens car $\frac{3\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}].$

- Résolution de l'équation $2 \arccos\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$

On cherche à "se débarrasser" des fonctions arc en appliquant la fonction sinus ou la fonction cosinus aux deux membres de cette équation.

Mais quelle fonction choisir ? L'une donne un résultat simple et l'autre débouche sur une équation compliquée et désagréable à résoudre.

Il faut faire le bon choix !

- En prenant le sinus des deux membres de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \frac{3\pi}{2} - \beta \quad \Rightarrow \quad \sin(2\alpha) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\cos \beta \\ &\Leftrightarrow 2 \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2} = -\sqrt{1 - \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

- En prenant le cosinus des deux membres de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \frac{3\pi}{2} - \beta \quad \Rightarrow \quad \cos(2\alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \\ &\Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\sin \beta \\ &\Leftrightarrow 2 \left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{x^2-2}{x^2}. \end{aligned}$$

La deuxième méthode est évidemment la plus agréable.

Mais attention ! En appliquant une fonction trigonométrique aux deux membres de cette équation, **on perd l'équivalence**, car ces fonctions ne sont pas injectives. On introduit peut-être des solutions parasites.

- Résolution de l'équation associée :

$$2 \left(\frac{x}{4} \right)^2 - 1 = -\frac{x^2 - 2}{x^2} \Leftrightarrow x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \in D_{\text{def}}.$$

Les deux valeurs obtenues $x = -2$ et $x = 2$ sont des "candidats-solutions" (vraies solutions ou solutions parasites ?)

- On teste ces deux valeurs dans l'équation initiale :

$$\circ x = -2 : 2 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\circ x = +2 : 2 \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \neq \frac{3\pi}{2}$$

Donc seul $x = -2$ est solution , $S = \{-2\}$.

2. Résoudre dans \mathbb{R} les trois équations suivantes :

a) $\frac{\pi}{4} + \arctan(2x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(3x)$

b) $2 \arctan(x + \frac{1}{2}) + \arctan(2x - 1) = \frac{\pi}{2}$

c) $\arcsin x + \arcsin(2x) - \arccos(\sqrt{3}x) = \frac{\pi}{2}$

a) $\frac{\pi}{4} + \arctan(2x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(3x), \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$

On pose $\alpha = \arctan(2x)$ et $\beta = \arctan(3x)$.

L'équation devient : $\frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - \beta \Rightarrow \tan \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right).$

Attention ! D'une part, la fonction tangente est **non injective**, mais d'autre part, elle n'est pas définie sur tout \mathbb{R} .

$$\tan \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \beta}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \beta} \Leftrightarrow 2x = \frac{1 - 3x}{1 + 3x}, \quad x \neq -\frac{1}{3}.$$

La valeur interdite $x = -\frac{1}{3}$ coïncide avec la valeur interdite $\beta = -\frac{\pi}{4}$.

Cette valeur est peut-être solution, il faut la tester dans l'équation initiale :

$$\arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + \arctan(-1) < 0 \quad \text{donc} \quad \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + \arctan(-1) \neq \frac{\pi}{4}.$$

Donc $x = -\frac{1}{3}$ n'est pas solution. On cherche des solutions dans $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$:

$$2x = \frac{1-3x}{1+3x} \Leftrightarrow 6x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(6x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{6},$$

On teste ces deux "candidats-solutions" dans l'équation initiale :

- $x = -1$: $\underbrace{\arctan(-2)}_{<0} + \underbrace{\arctan(-3)}_{<0} \neq \frac{\pi}{4}.$
- $x = \frac{1}{6}$: soient $\alpha = \arctan \frac{1}{3} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\beta = \arctan \frac{1}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
 $\alpha + \beta \in [0, \pi]$ et $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$

Seul $x = \frac{1}{6}$ est donc solution, $S = \left\{ \frac{1}{6} \right\}.$

b) $2 \arctan(x + \frac{1}{2}) + \arctan(2x - 1) = \frac{\pi}{2}, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$

On pose $\alpha = \arctan(x + \frac{1}{2})$ et $\beta = \arctan(2x - 1).$

L'équation devient : $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$$\Rightarrow \tan(2\alpha) = \tan(\frac{\pi}{2} - \beta) \Leftrightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\tan \beta}, \quad 2\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2} \text{ et } \beta \neq 0.$$

Attention ! D'une part, la fonction tangente est **non injective**, mais d'autre part, elle n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}.$

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\tan \beta} \Leftrightarrow \frac{2(x + \frac{1}{2})}{1 - (x + \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2x - 1}, \quad x \neq -\frac{3}{2} \text{ et } x \neq \frac{1}{2}.$$

Les valeurs interdites $x = -\frac{3}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$ coïncident avec les valeurs interdites $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ et $\beta = 0.$

Ces valeurs sont peut-être solutions, il faut les tester dans l'équation initiale :

- $x = -\frac{3}{2}$: $2 \arctan(-1) + \arctan(-4) < 0,$
- $x = \frac{1}{2}$: $2 \arctan(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$

Donc $x = \frac{1}{2}$ est solution.

On cherche d'éventuelles autres solutions dans $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}:$

$$\frac{2(x + \frac{1}{2})}{1 - (x + \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2x - 1} \Leftrightarrow (2x + 1)(2x - 1) = 1 - (x + \frac{1}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + x - \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})(5x + \frac{7}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{10}.$$

On teste cette valeur dans l'équation initiale :

$x = -\frac{7}{10}$: $2 \arctan(-\frac{1}{5}) + \arctan(-\frac{12}{5}) < 0,$ donc $x = -\frac{7}{10}$ n'est pas solution.

L'unique solution est $x = \frac{1}{2}, \quad S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$

c) $\arcsin x + \arcsin(2x) - \arccos(\sqrt{3}x) = \frac{\pi}{2}$.

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, 1], 2x \in [-1, 1] \text{ et } \sqrt{3}x \in [-1, 1]\} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

Soient $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arcsin(2x)$ et $\gamma = \arccos(\sqrt{3}x)$.

L'équation s'écrit : $\alpha + \beta - \gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \gamma$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \cos \gamma$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt{1 - (2x)^2} + 2x \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, & \text{ou} \\ \sqrt{1 - 4x^2} + 2\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

o $x = 0$ n'est pas solution : $\arcsin(0) + \arcsin(0) - \arccos(0) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$,

$$\circ \sqrt{1 - 4x^2} + 2\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4x^2 + 4(1 - x^2) + 4\sqrt{1 - 4x^2}\sqrt{1 - x^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{1 - 4x^2}\sqrt{1 - x^2} = 8x^2 - 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1 - 4x^2}\sqrt{1 - x^2} = 4x^2 - 1.$$

Donc $4x^2 - 1 \geq 0$, or $x \in D_{\text{def}} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

les seules solutions de cette équation sont donc $x = \pm\frac{1}{2}$.

On teste ces deux valeurs dans l'équation initiale :

o $x = -\frac{1}{2}$: $\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arcsin(-1) - \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$,

o $x = \frac{1}{2}$: $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin 1 - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Il n'y a donc qu'une seule solution $x = \frac{1}{2}$, $S = \{\frac{1}{2}\}$.

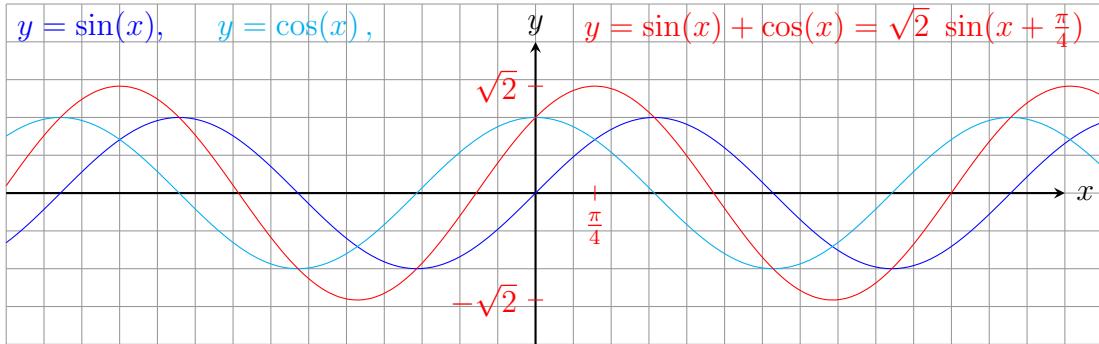
3. Soit la fonction f de $A \subset \mathbb{R}$ dans $B \subset \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x + \cos x$.

Déterminer A et B de sorte que f soit une bijection.

Déterminer alors la fonction réciproque de f .

En vue de déterminer l'ensemble $\text{Im } f$, on cherche à exprimer f à l'aide d'une seule fonction trigonométrique :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x \right] \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$



On déduit donc que $\text{Im } f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

• Une solution

On définit l'ensemble de départ A en se servant de la détermination principale du sinus : l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

La fonction $c(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ est injective si $x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

La fonction $f : A = [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ est donc bijective.

$$x \mapsto \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

Elle admet une fonction réciproque f^{-1} .

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$ et $x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \arcsin(\frac{y}{\sqrt{2}}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin(\frac{y}{\sqrt{2}}).$$

Cette fonction réciproque de $f(x) = \sin x + \cos x$ est donc définie par

$$f^{-1} : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \rightarrow [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$$

$$x \mapsto -\frac{\pi}{4} + \arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

• Une autre solution

On définit l'ensemble de départ A en se servant d'une détermination non principale du sinus : par exemple l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

La fonction $c(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ est injective si $x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$:

La fonction $f : A = [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \rightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ est donc bijective.

$$x \mapsto \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

Elle admet une fonction réciproque f^{-1} .

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$ et $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Cette fonction réciproque de $f(x) = \sin x + \cos x$ est donc définie par

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] &\longrightarrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \\ x &\longmapsto \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

• Une troisième solution

On exprime f à l'aide de la fonction cosinus, puis on définit l'ensemble de départ A en se servant de la détermination principale du cosinus : l'intervalle $[0, \pi]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \sin x \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x \right] \\ &= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

La fonction $c(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ est injective si $x - \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$:

La fonction $f : A = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \longrightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ est donc bijective.

$$x \longmapsto \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Elle admet une fonction réciproque f^{-1} .

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$ et $x - \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$, donc

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Cette fonction réciproque de $f(x) = \sin x + \cos x$ est donc définie par

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] &\longrightarrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \\ x &\longmapsto \frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Remarque : il s'agit de la même fonction f^{-1} que dans la deuxième solution. seule son expression est différente.

4. Calculer $\arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

En déduire la représentation graphique de la fonction $f(x) = \arctan \left(\frac{1}{x}\right)$ à partir de celle de la fonction $\arctan x$.

Localisation de $\arctan(x) + \arctan \left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\alpha = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \beta = \arctan \left(\frac{1}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \alpha + \beta \in]-\pi, \pi[.$$

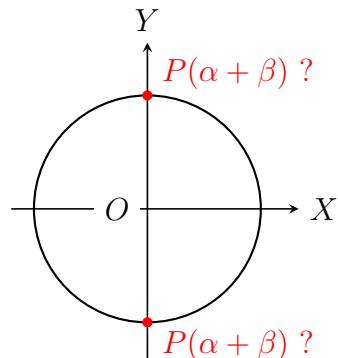
Calcul de $\tan(\alpha + \beta)$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}, \quad \text{avec } \alpha = \arctan x \text{ et } \beta = \arctan \left(\frac{1}{x}\right).$$

Le dénominateur est nul : $1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta = 1 - x \cdot \frac{1}{x} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Donc $\tan(\alpha + \beta)$ n'existe pas.

Or $\alpha + \beta \in]-\pi, \pi[$ et $\tan(\alpha + \beta)$ n'existe pas, implique que $\alpha + \beta = \pm \frac{\pi}{2}$.



On essaie de déterminer $\alpha + \beta$:

- avec un argument de signe :

$$\circ \text{ si } x < 0 : \quad \underbrace{\alpha}_{<0} + \underbrace{\beta}_{<0} = \arctan(x) + \arctan \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\circ \text{ si } x > 0 : \quad \underbrace{\alpha}_{>0} + \underbrace{\beta}_{>0} = \arctan(x) + \arctan \left(\frac{1}{x}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

- Ou en calculant $\sin(\alpha + \beta)$:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\
&= \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \cdot \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot |x|}{\sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \frac{x \cdot |x|}{x^2 + 1} + \frac{\frac{1}{x} \cdot |x|}{x^2 + 1} \\
&= \frac{x \cdot x \cdot \operatorname{sgn}(x)}{x^2 + 1} + \frac{\frac{1}{x} \cdot x \cdot \operatorname{sgn}(x)}{x^2 + 1} \\
&= \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \cdot \operatorname{sgn}(x) \\
&= \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

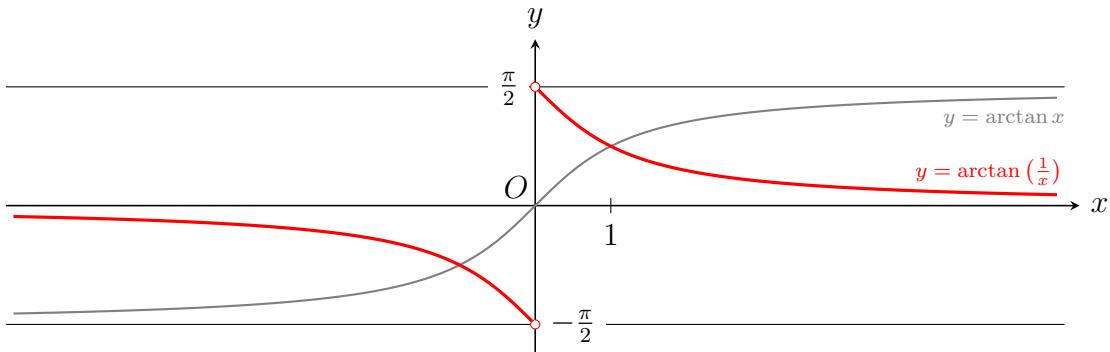
Or $\alpha + \beta \in]-\pi, \pi[$, donc $\alpha + \beta = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \end{cases}$

$$\arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On en déduit l'expression de $f(x) = \arctan \left(\frac{1}{x} \right)$ en fonction de $\arctan x$:

$$f(x) = \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si } x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

puis le graphe de $f(x) = \arctan \left(\frac{1}{x} \right)$ à partir de celui de $\arctan(x)$:



5. Dans un triangle ABC les angles α, β, γ sont définis par

$$\alpha = \arccos(4x) \quad \beta = \arccos(-3x) \quad \gamma = \arccos(24x^2).$$

On connaît aussi le rayon R de son cercle circonscrit $R = 25$.

- a) Déterminer la valeur de x ainsi que les valeurs de $\sin \alpha$, $\sin \beta$ et $\sin \gamma$.
 - b) Calculer le rayon r du cercle inscrit du triangle ABC .
-

- a) La somme des mesures des trois angles du triangle ABC vaut π .

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma = \pi &\Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \gamma) \\ &\Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\cos \gamma \\ &\Leftrightarrow (4x)(-3x) - \sqrt{1 - (4x)^2} \sqrt{1 - (-3x)^2} = -24x^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - (4x)^2} \sqrt{1 - (-3x)^2} = 12x^2 \\ &\Leftrightarrow (1 - 16x^2)(1 - 9x^2) = 144x^4 \Leftrightarrow 25x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

On teste ces deux valeurs : l'unique solution est $x = \frac{1}{5}$.

Et on en déduit le sinus des trois angles :

$$\begin{aligned} \circ \quad \sin \alpha &= \sin(\arccos \frac{4}{5}) = +\sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}, \\ \circ \quad \sin \beta &= \sin[\arccos(-\frac{3}{5})] = +\sqrt{1 - (-\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}, \\ \circ \quad \sin \gamma &= \sin(\arccos \frac{24}{25}) = +\sqrt{1 - (\frac{24}{25})^2} = \frac{7}{25}. \end{aligned}$$

- b) Connaissant le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC , on en déduit la mesure des trois côtés a , b et c .

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

$$a = 2R \sin \alpha = 30, \quad b = 2R \sin \beta = 40 \quad \text{et} \quad c = 2R \sin \gamma = 14.$$

Connaissant la mesure des trois côtés a , b et c , on en déduit le rayon r du cercle inscrit au triangle ABC .

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad \text{où} \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c) = 42,$$

$$r = \sqrt{\frac{12 \cdot 2 \cdot 28}{42}} = 4.$$
