Corrigé 8

1. Calculer, sans machine, les valeurs suivantes :

a) $A = \cos(\arcsin(-3))$ c) $C = \tan(\arccos(-\frac{1}{3}))$ e) $E = \cos(2\arccos(\frac{2}{5}))$

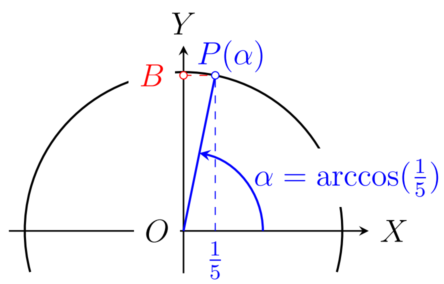
b) $B = \sin(\arccos(\frac{1}{5}))$ d) $D = \tan(\pi - \arctan(2))$ f) $F = \sin(-2\arctan(2))$

---

a) $\arcsin(-3)$ n'a pas de sens, car il n'existe aucun angle dont le sinus vaut -3. Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \arcsin(x)$ est $D_f = [-1\,,\,1\,]$. Donc $A = \cos(\arcsin(-3))$ n'existe pas.

b) On exprime $B = \sin(\arccos(\frac{1}{5}))$ à l'aide de la fonction cosinus en utilisant la relation de Pythagore :

$$\begin{aligned} B^2 &= \sin^2\left(\arccos\left(\tfrac{1}{5}\right)\right) \\ &= 1 - \cos^2\left(\arccos\left(\tfrac{1}{5}\right)\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}. \end{aligned}$$



Or $\alpha = \arccos(\frac{1}{5})$ est un angle qui appartient à l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$, on en déduit donc que son sinus est positif :

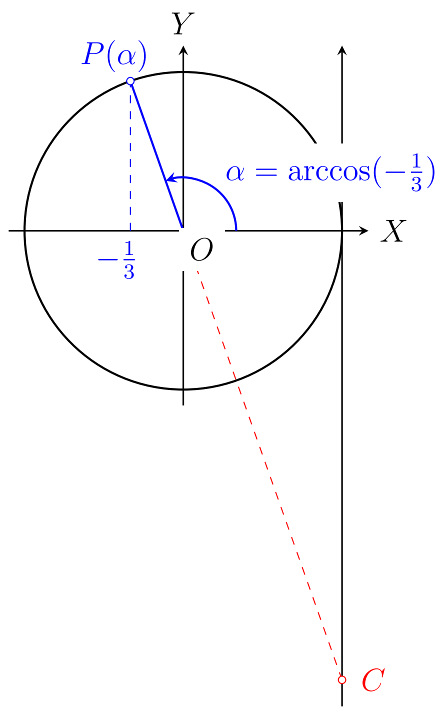
$$B = +\sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

c) On exprime $C = \tan(\alpha)$ à l'aide de la fonction cosinus :

$$C = \tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Or $\alpha = \arccos(-\frac{1}{3})$ est un angle qui appartient à l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$, on en déduit donc que son sinus est positif :

$$\begin{aligned} C &= \frac{+\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \\ &= \frac{+\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2}}{-\frac{1}{3}} \\ &= -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

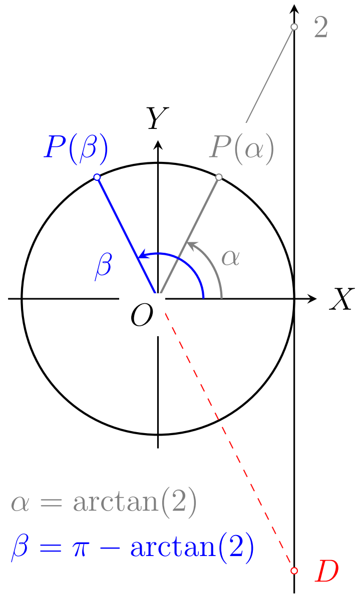


d) Les points $P(\alpha)$ et $P(\pi-\alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

On en déduit que

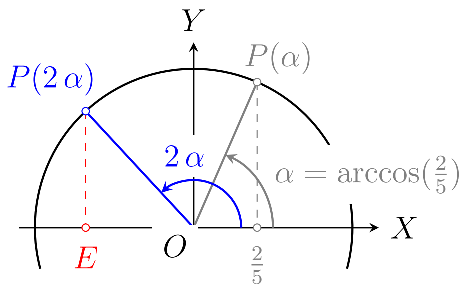
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha\,.$$

$$\begin{aligned} D &= \tan(\pi - \arctan(2)) \\ &= -\tan(\arctan(2)) \\ &= -2\,. \end{aligned}$$



e) On utilise l'expression du cosinus de l'angle double : $\cos(2\,\alpha) = 2\,\cos^2(\alpha) - 1\,.$

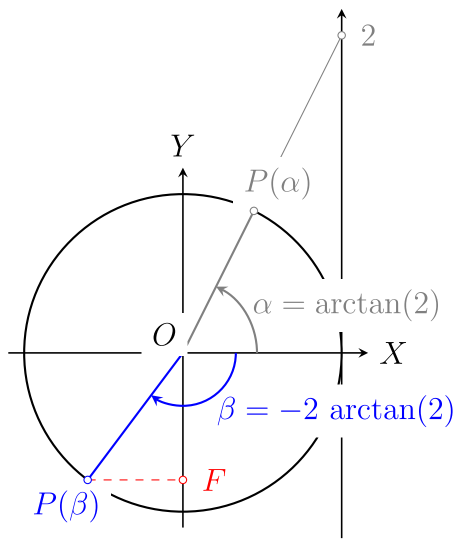
$$\begin{aligned} E &= \cos\left(2\,\arccos\left(\tfrac{2}{5}\right)\right) \\ &= 2\,\cos^2\left(\arccos\left(\tfrac{2}{5}\right)\right) - 1 \\ &= 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 \\ &= -\frac{17}{25}\,. \end{aligned}$$



f) On utilise l'expression du sinus de l'angle double en fonction de la tangente :

$$\begin{aligned} \sin(2\,\alpha) &= 2\,\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) \\ &= 2\,\tan(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha) \\ &= \frac{2\,\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \sin(-2\,\arctan(2)) \\ &= -\sin(2\,\arctan(2)) \\ &= -\frac{2\,\tan(\arctan(2))}{1+\tan^2(\arctan(2))} \\ &= -\frac{4}{5}\,. \end{aligned}$$



2. Calculer, sans machine, les valeurs suivantes :

a) $A = \arccos(\cos(\frac{17\pi}{3}))$

b) $B = \arctan(\tan(-\frac{7\pi}{12}))$

c) $C = \arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{12}))$

d) $D = \arctan(-\cot(\frac{13\pi}{5}))$

a) $A = \arccos(\cos(\frac{17\pi}{3}))$.

On cherche à exprimer $\cos(\frac{17\pi}{3})$ comme le cosinus d'un angle appartenant à la détermination principale du cosinus : $[\,0\,,\,\pi\,]$.

$\cos(\frac{17\pi}{3}) = \cos(\frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3})$.

D'où : $A = \arccos(\cos(\frac{17\pi}{3})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{3})) = \dfrac{\pi}{3}$.

b) $B = \arctan(\tan(-\frac{7\pi}{12}))$.

On cherche à exprimer $\tan(-\frac{7\pi}{12})$ comme la tangente d'un angle appartenant à la détermination principale de la tangente : $]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$.

$\tan(-\frac{7\pi}{12}) = \tan(-\frac{7\pi}{12} + \pi) = \tan(\frac{5\pi}{12})$.

D'où : $B = \arctan(\tan(-\frac{7\pi}{12})) = \arctan(\tan(\frac{5\pi}{12})) = \dfrac{5\pi}{12}$.

c) $C = \arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{12}))$.

On cherche à exprimer $\cos(-\frac{7\pi}{12})$ comme le sinus d'un angle appartenant à la détermination principale du sinus : $[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

$\cos(-\frac{7\pi}{12}) = \sin[\,\frac{\pi}{2} - (-\frac{7\pi}{12})\,] = \sin(\frac{13\pi}{12}) = \sin(\pi - \frac{13\pi}{12}) = \sin(-\frac{\pi}{12})$.

D'où : $C = \arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{12})) = \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{12})) = -\dfrac{\pi}{12}$.

d) $D = \arctan(-\cot(\frac{13\pi}{5}))$.

On cherche à exprimer $-\cot(\frac{13\pi}{5})$ comme la tangente d'un angle appartenant à la détermination principale de la tangente : $]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$.

$-\cot(\frac{13\pi}{5}) = \cot(-\frac{13\pi}{5}) = \tan[\,\frac{\pi}{2} - (-\frac{13\pi}{5})\,] = \tan(\frac{31\pi}{10}) = \tan(\frac{\pi}{10})$.

D'où : $D = \arctan(-\cot(\frac{13\pi}{5})) = \arctan(\tan(\frac{\pi}{10})) = \dfrac{\pi}{10}$.

3. Montrer que : $\arcsin(\frac{3}{5}) + \arccos(\frac{15}{17}) = \arcsin(\frac{77}{85})$.

Soient $\alpha = \arcsin(\frac{3}{5})$ et $\beta = \arccos(\frac{15}{17})$.

Pour montrer que $\alpha + \beta = \arcsin(\frac{77}{85})$, il faut montrer que $\alpha + \beta$ vérifie les deux propriétés caractéristiques qui définissent $\arcsin(\frac{77}{85})$:

i) $\alpha + \beta \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$

ii) et $\sin(\alpha + \beta) = \frac{77}{85}$.

i) Pour vérifier que $\alpha+\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on peut montrer, par exemple, que

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad 0<\beta<\frac{\pi}{4}.$$

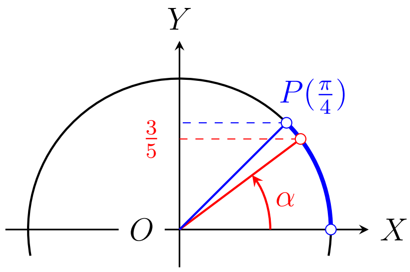
$*$ Montrons que $\alpha=\arcsin(\frac{3}{5})$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ et $0<\dfrac{3}{5}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

d'où $0<\sin\alpha<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Or la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$,

donc $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.



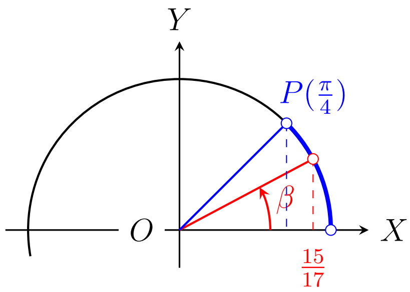
$*$ Montrons que $\beta=\arccos(\frac{15}{17})$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

$\cos\beta=\dfrac{15}{17}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{15}{17}<1$,

d'où $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\beta<1$.

Or la fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$,

donc $0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$.



$*$ On en conclut que $\alpha+\beta$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

ii) Calcul de $\sin(\alpha+\beta)$ avec $\alpha=\arcsin(\frac{3}{5})$ et $\beta=\arccos(\frac{15}{17})$.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta\\
&= \frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}+\sqrt{1-\left(\tfrac{3}{5}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\tfrac{15}{17}\right)^2}\\
&= \frac{1}{5\cdot 17}\left[3\cdot 15+\sqrt{5^2-3^2}\cdot\sqrt{17^2-15^2}\right]\\
&= \frac{1}{85}\left[45+\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{(17-15)\cdot(17+15)}\right]\\
&= \frac{1}{85}\left[45+\sqrt{16}\cdot\sqrt{64}\right]\\
&= \frac{1}{85}\left[45+4\cdot 8\right]\\
&= \frac{77}{85}.
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\sin(\alpha+\beta)=\tfrac{77}{85} \quad \text{et} \quad \alpha+\beta\in[0, \tfrac{\pi}{2}] \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta=\arcsin(\tfrac{77}{85}).$$

4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné :

a) $\sin x = -\frac{2}{3}$, $x \in [\,0\,,\,2\pi\,]$,

b) $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{2}{3}$, $x \in [\,\pi\,,\,3\pi\,]$,

c) $\sin(2x) = \frac{2}{3}$, $x \in [-\pi\,,\,0\,]$,

d) $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$, $x \in [\,\pi\,,\,3\pi\,]$,

e) $\tan x = -\frac{3}{2}$, $x \in [\,0\,,\,2\pi\,]$,

f) $\cot(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{3}{2}$, $x \in]\,\pi\,,\,3\pi\,[$,

g) $\tan(2x) = 2$, $x \in]-\pi\,,\,0\,[$,

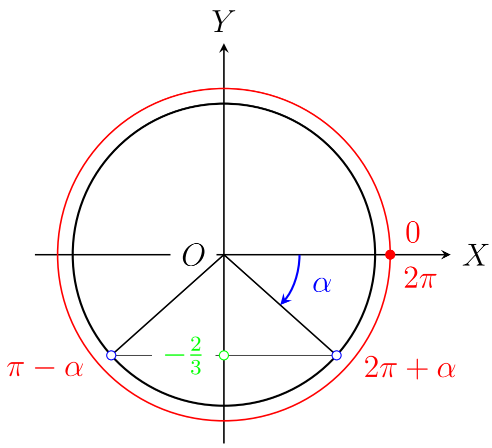
h) $\cot(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$, $x \in]\,\pi\,,\,3\pi\,[$.

---

a) Résolution de l'équation $\sin x = -\frac{2}{3}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin x = -\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\,k\,\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$



- Résolution sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$

Soit $\alpha = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$, l'équation $\sin x = -\frac{2}{3}$ admet deux solutions

– l'une est engendrée par $\alpha + 2k\pi$ avec $k = 1$,

– l'autre est engendrée par $\pi - \alpha + 2k\pi$ avec $k = 0$.

$$S = \left\{\pi - \arcsin\left(-\tfrac{2}{3}\right)\,,\; 2\pi + \arcsin\left(-\tfrac{2}{3}\right)\right\},$$

$$\text{ou} \qquad S = \left\{\pi + \arcsin\left(\tfrac{2}{3}\right)\,,\; 2\pi - \arcsin\left(\tfrac{2}{3}\right)\right\}.$$

b) Résolution de l'équation $\cos(x-\frac{\pi}{3})=-\frac{2}{3}$ sur l'intervalle $[\,\pi\,,\,3\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cos(x-\tfrac{\pi}{3})=-\frac{2}{3}\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\,k\,\pi\\ \text{ou}\\ x-\frac{\pi}{3}=-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\,k\,\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\,k\,\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{\pi}{3}-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\,k\,\pi\end{array}\right.\qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Remarques :

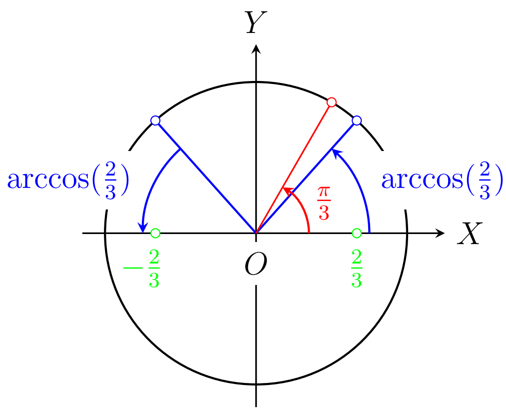
- On vérifie sur le cercle trigonométrique que

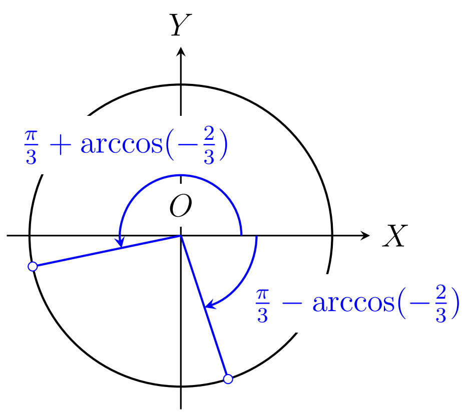
$$\arccos(-a)=\pi-\arccos a\,,\quad\forall\ 0\leq a\leq 1\,.$$

- D'autre part, en comparant les cosinus des angles $\frac{\pi}{3}$ et $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$, on en déduit une comparaison de ces angles :

$$\tfrac{1}{2}<\tfrac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad\tfrac{\pi}{3}>\arccos\left(\tfrac{2}{3}\right)\,.$$

Des deux remarques précédentes, on conclut que $\frac{\pi}{3}+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)>\pi$.





- Résolution sur l'intervalle $[\,\pi\,,\,3\pi\,]$

Sur l'intervalle $[\,\pi\,,\,3\pi\,]$, l'équation $\cos(x-\frac{\pi}{3})=-\frac{2}{3}$ admet deux solutions

- l'une est engendrée par $\frac{\pi}{3}+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\,k\,\pi$ avec $k=0$,
- l'autre est engendrée par $\frac{\pi}{3}-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\,k\,\pi$ avec $k=1$.

$$S=\left\{\tfrac{\pi}{3}+\arccos\left(-\tfrac{2}{3}\right)\,,\ \tfrac{7\pi}{3}-\arccos\left(-\tfrac{2}{3}\right)\right\},$$

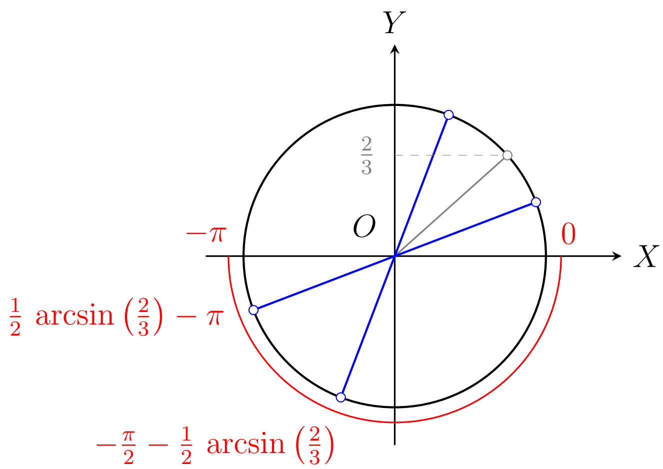
$$\text{ou}\qquad S=\left\{\tfrac{4\pi}{3}-\arccos\left(\tfrac{2}{3}\right)\,,\ \tfrac{4\pi}{3}+\arccos\left(\tfrac{2}{3}\right)\right\}.$$

c) Résolution de l'équation $\sin(2x) = \frac{2}{3}$ sur l'intervalle $[-\pi\,,\,0\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin(2x) = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + 2\,k\,\pi \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\,\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$



- Résolution sur l'intervalle $[-\pi\,,\,0\,]$

  Sur l'intervalle $[-\pi\,,\,0\,]$, l'équation $\sin(2x) = \frac{2}{3}$ admet deux solutions

  – l'une est engendrée par $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\,\pi$ avec $k = -1$,

  – l'autre est engendrée par $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\,\pi$ avec $k = -1$.

$$S = \left\{ \tfrac{1}{2}\arcsin\left(\tfrac{2}{3}\right) - \pi\,,\ -\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\arcsin\left(\tfrac{2}{3}\right) \right\}\,.$$

d) Résolution de l'équation $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$ sur l'intervalle $[\,\pi\,,\,3\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cos(\tfrac{x}{2}) = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2\,k\,\pi \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 4\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = -2\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 4\,k\,\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Résolution sur l'intervalle $[\,\pi\,,\,3\pi\,]$

  Sur l'intervalle $[\,\pi\,,\,3\pi\,]$, l'équation $\cos(\frac{x}{2})=\frac{1}{3}$ n'admet pas de solution.

  - Pour $k=0$, les deux solutions sont inférieures à π.

    En effet $0<\arccos\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{\pi}{2}$, d'où

    $$0<2\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)<\pi \quad \text{et} \quad -\pi<-2\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)<0\,.$$

  - Pour $k=1$, les deux solutions sont supérieures à 3π. En effet :

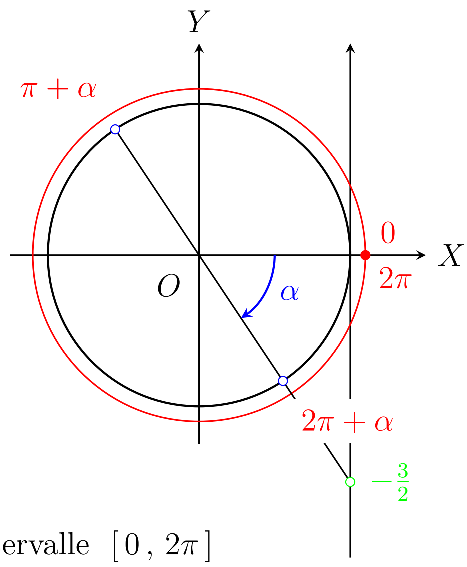
    $$4\pi<2\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)+4\pi<5\pi \quad \text{et} \quad 3\pi<-2\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)+4\pi<4\pi\,.$$

  $$S=\emptyset\,.$$

e) Résolution de l'équation $\tan x=-\frac{3}{2}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

  $$\tan x=-\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=\arctan(-\tfrac{3}{2})+k\pi\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$



- Résolution sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$

  Soit $\alpha=\arctan\left(-\frac{3}{2}\right)$.

  Sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$, l'équation $\tan x=-\frac{3}{2}$ admet deux solutions : $x=\pi+\alpha$ et $x=2\pi+\alpha$.

  $$S=\left\{\pi+\arctan\left(-\tfrac{3}{2}\right)\,,\ 2\pi+\arctan\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right\}.$$

f) Résolution de l'équation $\cot(x-\frac{\pi}{6})=-\frac{3}{2}$ sur l'intervalle $]\,\pi\,,\,3\pi\,[$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

  $$\cot(x-\tfrac{\pi}{6})=-\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x-\frac{\pi}{6}=\operatorname{arccot}\left(-\tfrac{3}{2}\right)+k\,\pi$$

  $$\Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{6}+\operatorname{arccot}\left(-\tfrac{3}{2}\right)+k\,\pi\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Remarques :

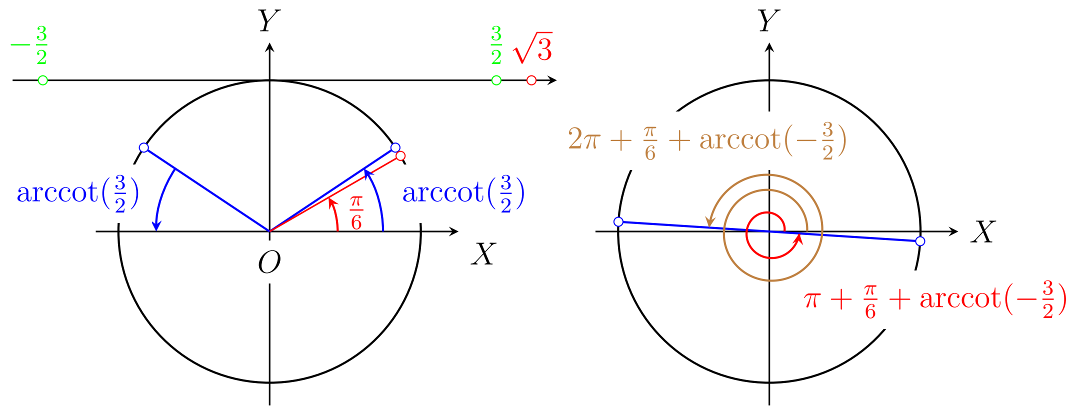
- On vérifie sur le cercle trigonométrique que

$$\pi - \operatorname{arccot}(-a) = \operatorname{arccot} a\,, \quad \forall\ a \geq 0\,.$$

- D'autre part, en comparant les cotangentes des angles $\frac{\pi}{6}$ et $\operatorname{arccot}\left(\frac{3}{2}\right)$, on en déduit une comparaison de ces angles :

$$\sqrt{3} > \tfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\pi}{6} < \operatorname{arccot}\left(\tfrac{3}{2}\right)\,.$$

Des deux remarques précédentes, on conclut que $\frac{\pi}{6} + \operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{2}\right) < \pi\,.$



- Résolution sur l'intervalle $]\,\pi\,,\,3\pi\,[$

Sur l'intervalle $]\,\pi\,,\,3\pi\,[$, l'équation $\cot(x-\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2}$ admet deux solutions

- l'une est très proche de 2π : $x = \pi + \frac{\pi}{6} + \operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{2}\right)$,
- l'autre est très proche de 3π : $x = 2\pi + \frac{\pi}{6} + \operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{2}\right)$.

$$S = \left\{\tfrac{7\pi}{6} + \operatorname{arccot}\left(-\tfrac{3}{2}\right)\,,\ \tfrac{13\pi}{6} + \operatorname{arccot}\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right\}.$$

g) Résolution de l'équation $\tan(2x) = 2$ sur l'intervalle $]-\pi\,,\,0\,[$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\tan(2x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x = \arctan(2) + k\,\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\cdot\arctan(2) + k\,\frac{\pi}{2}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

- Résolution sur l'intervalle $]-\pi\,,\,0\,[$

Sur l'intervalle $]-\pi\,,\,0\,[$, l'équation $\tan(2x) = 2$ admet deux solutions qui correspondent à $\frac{1}{2}\cdot\arctan(2) + k\,\frac{\pi}{2}$ avec $k = -2$ et $k = -1$.

$$S = \left\{\tfrac{1}{2}\cdot\arctan(2) - \pi\,,\ \tfrac{1}{2}\cdot\arctan(2) - \tfrac{\pi}{2}\right\}\,.$$

h) Résolution de l'équation $\cot(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$ sur l'intervalle $]\,\pi\,,\,3\pi\,[$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cot(\tfrac{x}{2}) = \frac{1}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arccot}\left(\tfrac{1}{3}\right) + k\,\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \operatorname{arccot}\left(\tfrac{1}{3}\right) + 2\,k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

- Résolution sur l'intervalle $]\,\pi\,,\,3\pi\,[$

Sur l'intervalle $]\,\pi\,,\,3\pi\,[$, l'équation $\cot(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$ admet une seule solution.

$$S = \left\{2 \cdot \operatorname{arccot}\left(\tfrac{1}{3}\right) + 2\pi\right\}\,.$$

5. Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle donné :

a) $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$, $\quad x \in [\,0\,,\,2\pi\,]$, $\qquad$ c) $\tan(2x) \geq 2$, $\quad -\pi \leq x \leq 0$.

b) $\cot x \geq -\frac{1}{2}$, $\quad -\frac{3\pi}{2} \leq x < 0$,

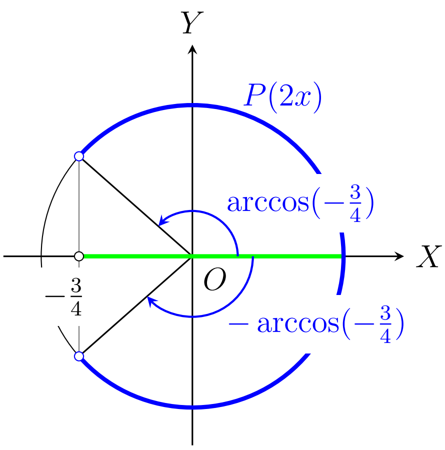
---

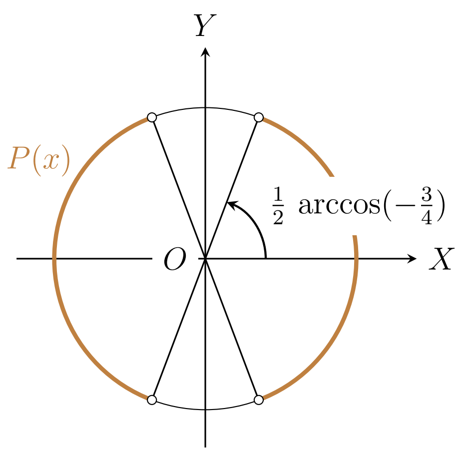
a) Résolution de l'inéquation $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$

- Représentation des points $P(2x)$ tels que $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$.

  On représente, sur l'axe des cosinus, les valeurs plus grandes que $-\frac{3}{4}$.
  Puis on représente les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est plus grande que $-\frac{3}{4}$.

$$\cos(2x) > -\tfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -\arccos(-\tfrac{3}{4}) + 2k\pi < 2x < \arccos(-\tfrac{3}{4}) + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



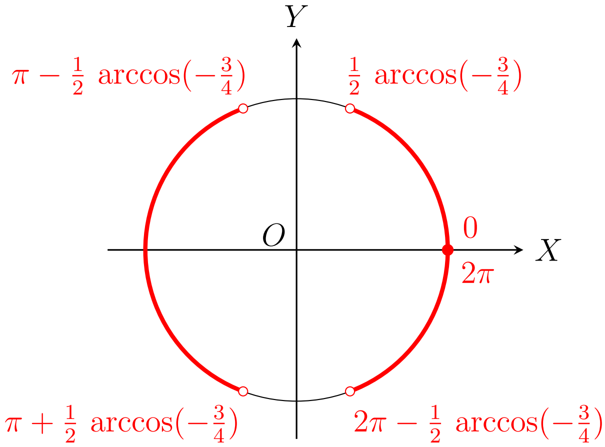


- On en déduit les points $P(x)$ solution de l'inéquation $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} &-\arccos(-\tfrac{3}{4}) + 2k\pi < 2x < \arccos(-\tfrac{3}{4}) + 2k\pi \\ \Leftrightarrow \quad &-\tfrac{1}{2}\arccos(-\tfrac{3}{4}) + k\pi < x < \tfrac{1}{2}\arccos(-\tfrac{3}{4}) + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$:

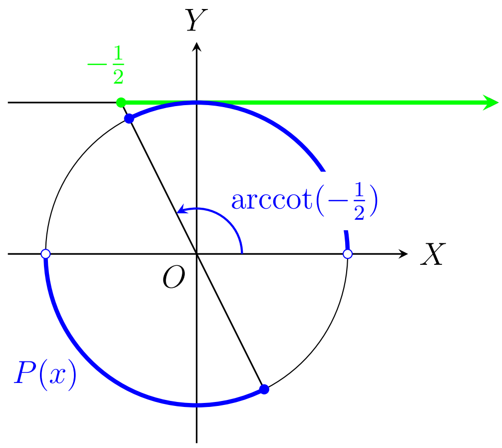
$$\begin{aligned} S &= [\,0\,,\ \tfrac{1}{2}\ \arccos(-\tfrac{3}{4})\,[\\ &\cup\ ]\,\pi - \tfrac{1}{2}\ \arccos(-\tfrac{3}{4})\,,\ \pi + \tfrac{1}{2}\ \arccos(-\tfrac{3}{4})\,[\\ &\cup\ ]\,2\pi - \tfrac{1}{2}\ \arccos(-\tfrac{3}{4})\,,\ 2\pi\,]\,. \end{aligned}$$



b) Résolution de l'inéquation $\quad \cot x \geq -\frac{1}{2} \quad$ sur l'intervalle $\quad [-\frac{3\pi}{2}\,,\,0\,[$

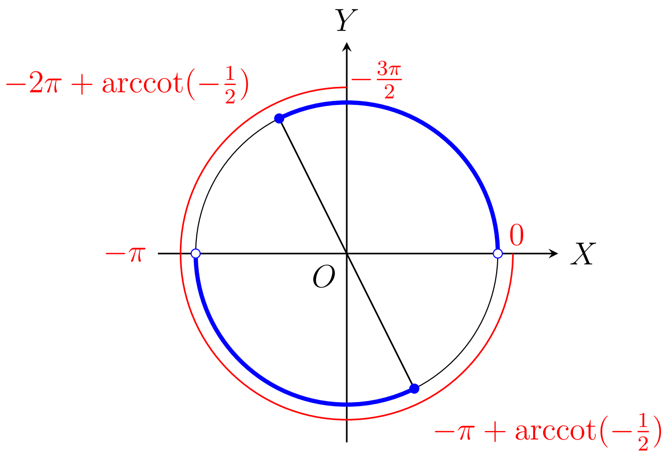
- Représentation des points $P(x)$ tels que $\cot x \geq -\frac{1}{2}$.
  On représente, sur l'axe des cotangentes, les valeurs plus grandes que $-\frac{1}{2}$.
  Puis on représente les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

$$\cot x \geq -\tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k\pi < x \leq \operatorname{arccot}(-\tfrac{1}{2}) + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



- Graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\frac{3\pi}{2}\,,\,0\,[$:

$$S = [-\tfrac{3\pi}{2}\,,\ -2\pi + \operatorname{arccot}(-\tfrac{1}{2})\,] \cup\,]-\pi\,,\ -\pi + \operatorname{arccot}(-\tfrac{1}{2})\,]\,.$$

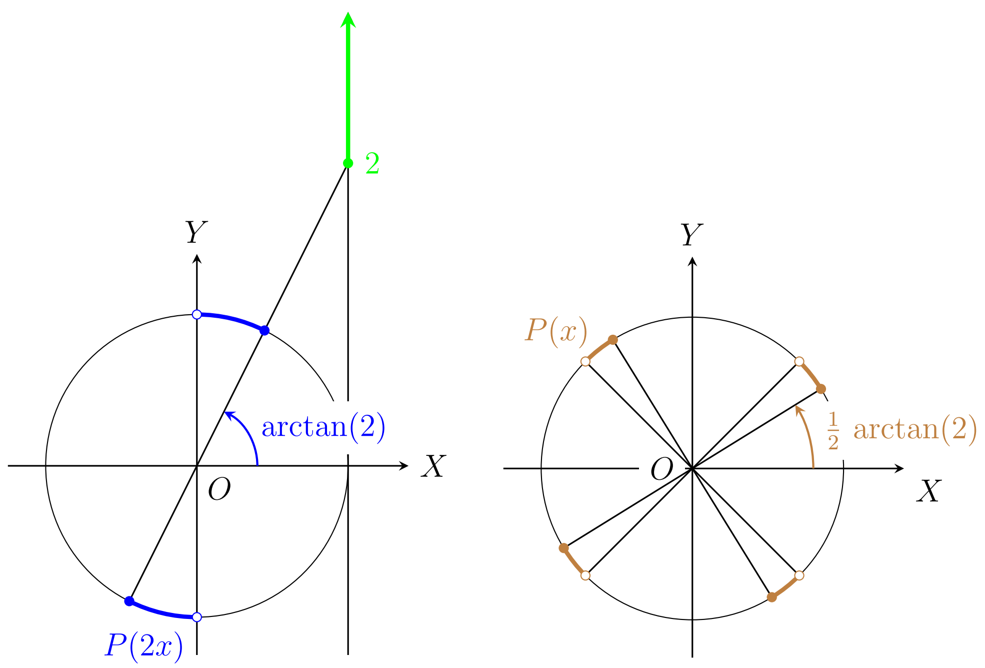


c) Résolution de l'inéquation $\tan(2x) \geq 2$ sur l'intervalle $[-\pi\,,\,0\,]$

- Représentation des points $P(2x)$ tels que $\tan(2x) \geq 2$.

  On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus grandes que 2.
  Puis on représente les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

$$\tan(2x) \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(2) + k\pi \leq 2x < \tfrac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



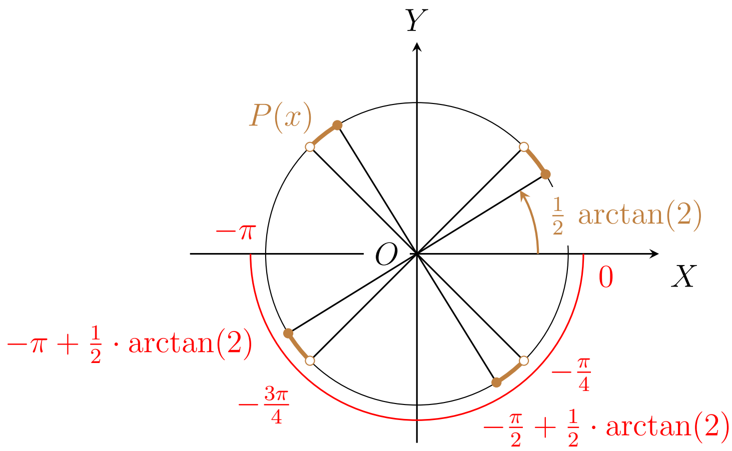
- On en déduit les points $P(x)$ solution de l'inéquation $\tan(2x) \geq 2$.

$$\arctan(2) + k\pi \leq 2x < \tfrac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\cdot\arctan(2) + k\,\tfrac{\pi}{2} \leq x < \tfrac{\pi}{4} + k\,\tfrac{\pi}{2}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi\,,\,0\,]$:

$$S = [-\pi + \tfrac{1}{2}\cdot\arctan(2)\,,\ -\tfrac{3\pi}{4}\,[\ \cup\ [-\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\arctan(2)\,,\ -\tfrac{\pi}{4}\,[\,.$$



6. Exprimer la somme S suivante à l'aide d'une seule valeur de la fonction $\arctan x$.

$$S = \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan 7 + \arctan 8$$

Indication : commencer par calculer $\arctan 2 + \arctan 3$, puis $\arctan 7 + \arctan 8$.

---

a) Soient $\alpha = \arctan 2$ et $\beta = \arctan 3$.

Pour pouvoir exprimer $\alpha + \beta$ à l'aide d'une seule fonction Arctangente, on localise cet angle, puis on calcule sa tangente.

- $\alpha \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$ et $\beta \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$ $\Rightarrow$ $\alpha + \beta \in [\,0\,,\,\pi\,[$.
- $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta} = \dfrac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$.

D'où $\alpha + \beta = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

b) Soient $\gamma = \arctan 7$ et $\delta = \arctan 8$.

De même, on localise l'angle $\gamma + \delta$, puis on calcule sa tangente.

- $\gamma \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$ et $\delta \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$ $\Rightarrow$ $\gamma + \delta \in [\,0\,,\,\pi\,[$.
- $\tan(\gamma + \delta) = \dfrac{\tan\gamma + \tan\delta}{1 - \tan\gamma\,\tan\delta} = \dfrac{7+8}{1-7\cdot 8} = -\dfrac{3}{11}$.

D'où $\gamma + \delta = \arctan(-\frac{3}{11}) + \pi = \pi - \arctan\frac{3}{11}$.

A ce stade, le contrat est rempli :

$S = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = \frac{3\pi}{4} + \pi - \arctan\frac{3}{11} = \frac{7\pi}{4} - \arctan\frac{3}{11}$.

c) Mais on peut réitérer encore une fois le procédé : on localise l'angle S puis on calcule sa tangente.

- $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$ et $\gamma+\delta\in\,]\,\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\,[\quad\Rightarrow\quad S\in\,]\,\frac{5\pi}{4}\,,\,\frac{7\pi}{4}\,[\,.$
- $\tan S=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma+\delta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\,\tan(\gamma+\delta)}=\dfrac{-1+(-\frac{3}{11})}{1-(-1)\cdot(-\frac{3}{11})}=-\dfrac{7}{4}\,.$

D'où $\quad S=\arctan(-\frac{7}{4})+2\pi=2\pi-\arctan\frac{7}{4}\,.$

7. Déterminer le domaine de définition des expressions suivantes :

a) $a(x)=\arccos(\sqrt{x}\,)$

b) $b(x)=\tan(\arcsin x)$

c) $c(x)=\arcsin(\tan x)$

d) $d(x)=\tan(2\,\arccos x)$

---

a) $a(x)=\arccos(\sqrt{x}\,)\,.$

$$D_a=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\quad\text{et}\quad -1\leq\sqrt{x}\leq 1\right\}\,.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ -1\leq\sqrt{x}\leq 1\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ 0\leq\sqrt{x}\leq 1\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ 0\leq x\leq 1\,,\end{array}\right.$$

$$D_a=[\,0\,,\;1\,]\,.$$

b) $b(x)=\tan(\arcsin x)\,.$

$$D_b=\left\{\,x\in\mathbb{R}\mid -1\leq x\leq 1\quad\text{et}\quad\arcsin x\neq\pm\tfrac{\pi}{2}\,\right\}\,.$$

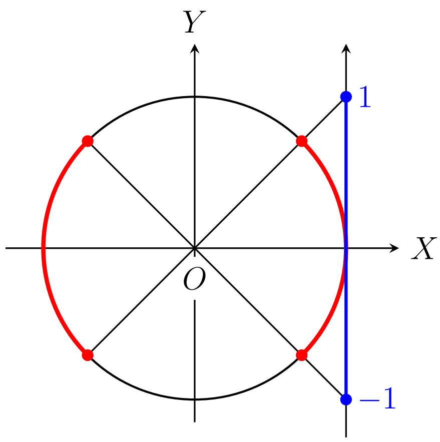
$$\forall\,x\in[-1\,,\;1\,]\,,\quad\arcsin x\in\left[-\tfrac{\pi}{2}\,,\;\tfrac{\pi}{2}\right]\quad\text{et}\quad\left\{\begin{array}{lll}\arcsin x=-\frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow & x=-1\,,\\ \arcsin x=+\frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow & x=+1\,.\end{array}\right.$$

$$D_b=\,]-1\,,\;1\,[\,.$$

c) $c(x)=\arcsin(\tan x)\,.$

$$D_c=\left\{\,x\in\mathbb{R}\mid x\neq\tfrac{\pi}{2}+k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\quad\text{et}\quad -1\leq\tan x\leq 1\,\right\}\,.$$

$$D_c=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\tfrac{\pi}{4}+k\pi\,,\;\tfrac{\pi}{4}+k\pi\right]\,.$$



d) $d(x) = \tan(2\,\arccos x)\,.$

$$D_d = \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 2\,\arccos x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z} \,\right\}\,.$$

$$2\,\arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \arccos x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \arccos x = \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \arccos x = \frac{3\pi}{4} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

$$D_d = [-1\,,\,1] \setminus \left\{-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}\,.$$