

Corrigé 6

1. Résoudre les équations suivantes :

- a) $\tan x + 3 \sin^2 x - \cos^2 x = 0$
 - b) $\sin^2 x + 8 \sin(2x) + 3 \cos^2 x = 10 \cot x$
 - c) $1 + 2 \sin x + \cos x + 2 \tan x = 0$
 - d) $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 = 0, \quad 0 < x < 2\pi$
 - e) $\frac{\sin(2x)}{1 - \cos x} + 2 = 2(\sin x + 2 \cos x)$
-

a) $\tan x + 3 \sin^2 x - \cos^2 x = 0, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

L'équation ne change pas lorsqu'on remplace x par $\pi + x$, on pose donc $z = \tan x$, z est défini $\forall x \in D_{\text{def}}$.

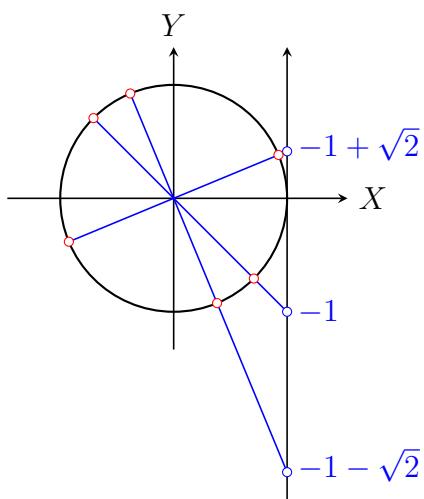
L'équation devient : $z + \frac{3z^2}{1+z^2} - \frac{1}{1+z^2} = 0 \Leftrightarrow z^3 + 3z^2 + z - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (z+1)(z^2+2z-1) = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z+1-\sqrt{2})(z+1+\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1, \text{ ou} \\ z = -1 + \sqrt{2}, \text{ ou} \\ z = -1 - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ ou} \\ x = \alpha + k\pi, \text{ ou} \\ x = \beta + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

avec $\alpha, \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan \alpha = -1 + \sqrt{2}$ et $\tan \beta = -1 - \sqrt{2}$.

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, \alpha + k\pi, \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \subset D_{\text{def}}.$$



b) $\sin^2 x + 8 \sin(2x) + 3 \cos^2 x = 10 \cot x , \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} .$

L'équation ne change pas lorsqu'on remplace x par $\pi + x$, on pose donc $z = \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le changement de variable n'est pas défini en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mais ces valeurs sont peut-être solution, il faut les tester dans l'équation.

$$\sin^2(\frac{\pi}{2} + k\pi) + 8 \sin(\pi + 2k\pi) + 3 \cos^2(\frac{\pi}{2} + k\pi) - 10 \cot(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1 \neq 0 .$$

Les valeurs $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ne sont donc pas solution de l'équation.

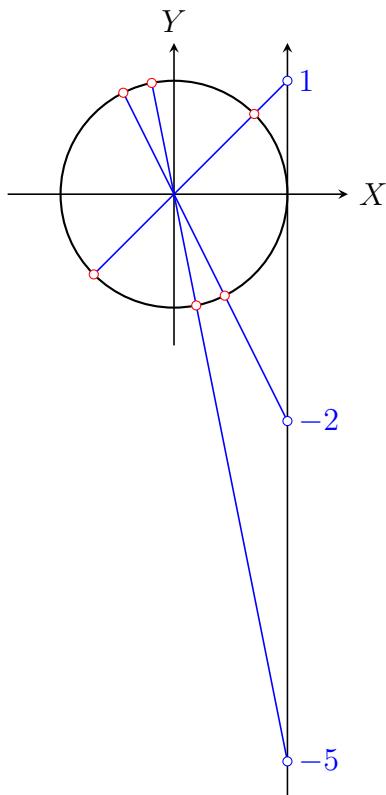
On cherche des solutions différentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en posant $z = \tan x$.

L'équation devient :

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{1+z^2} + 16 \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{3}{1+z^2} - \frac{10}{z} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^2 + 16z + 3}{1+z^2} - \frac{10}{z} = 0 \\ \Leftrightarrow z^3 + 6z^2 + 3z - 10 &= 0 \quad \Leftrightarrow (z-1)(z^2+7z+10) = 0 \\ \Leftrightarrow (z-1)(z+2)(z+5) &= 0 \quad \Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ou} \quad z = -2 \quad \text{ou} \quad z = -5 . \end{aligned}$$

Soient $\alpha, \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tels que $\tan \alpha = -2$ et $\tan \beta = -5$,

alors $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \alpha + k\pi, \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \subset D_{\text{def}}$.



c) $1 + 2 \sin x + \cos x + 2 \tan x = 0, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Aucun des trois tests d'invariance n'étant positif, on pose $z = \tan(\frac{x}{2})$, $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Le changement de variable n'est pas défini en $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, mais ces valeurs sont peut-être solution, il faut les tester dans l'équation.

$$1 + 2 \sin(\pi + 2k\pi) + \cos(\pi + 2k\pi) + 2 \tan(\pi + 2k\pi) = 0.$$

Ces valeurs sont donc solutions. On cherche d'autres éventuelles solutions à l'aide de $z = \tan(\frac{x}{2})$.

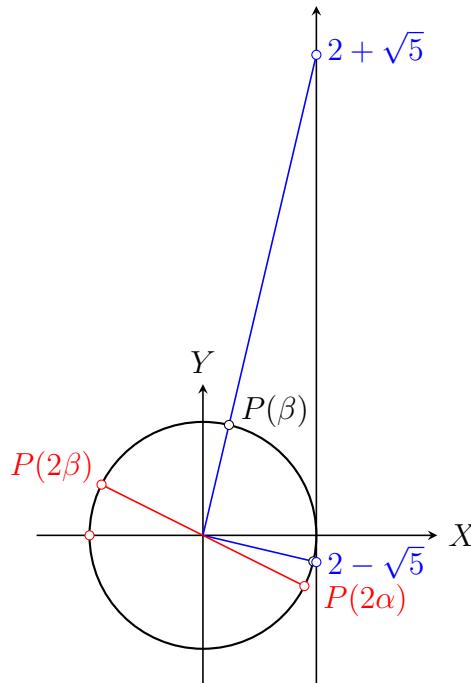
L'équation devient : $1 + 2 \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2} + 2 \frac{2z}{1-z^2} = 0$

$$\Leftrightarrow (1-z^2)(1+z^2) + (-z^2+4z+1)(1-z^2) + 4z(1+z^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2z^2 + 8z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow z^2 - 4z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow z = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Soient $\alpha, \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tels que $\tan \alpha = 2 - \sqrt{5}$ et $\tan \beta = 2 + \sqrt{5}$,

alors $S = \{\pi + 2k\pi, 2\alpha + 2k\pi, 2\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \subset D_{\text{def}}$.



d) $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 = 0, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$

L'équation ne change pas lorsqu'on remplace x par $\pi + x$, on pose donc $z = \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Le changement de variable n'est pas défini en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, mais ces valeurs sont peut-être solution, il faut les tester dans l'équation.

$$2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \sqrt{3} \sin(\pi + 2k\pi) - 3 = -1 \neq 0.$$

Les valeurs $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ne sont donc pas solution de l'équation.

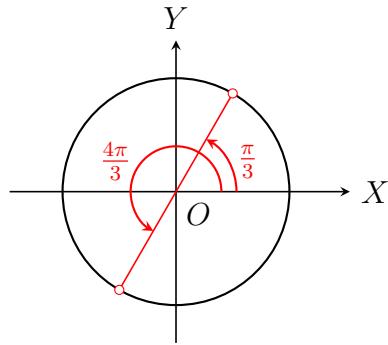
On cherche des solutions différentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en posant $z = \tan x$.

L'équation devient : $2 \frac{z^2}{1+z^2} + 2\sqrt{3} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2z^2 + 2\sqrt{3}z - 3(1+z^2) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Résolution sur l'intervalle $]0, 2\pi[$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$, $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$.



e) $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} + 1 = \sin x + 2 \cos x, D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Aucun des trois tests d'invariance n'étant positif, on pose $z = \tan(\frac{x}{2})$, $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le changement de variable n'est pas défini en $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mais ces valeurs sont peut-être solution, il faut les tester dans l'équation.

$$\frac{\sin(\pi + 2k\pi) \cos(\pi + 2k\pi)}{1 - \cos(\pi + 2k\pi)} + 1 - \sin(\pi + 2k\pi) - 2 \cos(\pi + 2k\pi) = 3 \neq 0.$$

Les valeurs $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ne sont donc pas solution de l'équation.

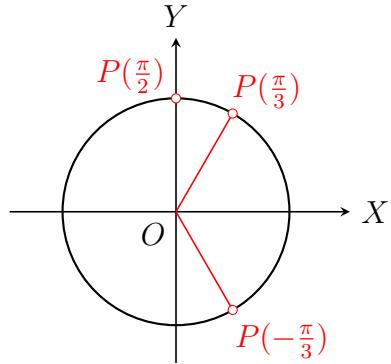
On cherche des solutions différentes de $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en posant $z = \tan(\frac{x}{2})$.

L'équation devient : $\frac{2z}{1+z^2} \cdot \frac{1-z^2}{1+z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1-z^2}{1+z^2}} + 1 - \frac{2z}{1+z^2} - 2 \frac{1-z^2}{1+z^2} = 0$

$$\Leftrightarrow 3z^3 - 3z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow 3z^2(z-1) - (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(3z^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1, \text{ ou} \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ ou} \\ z = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(\frac{x}{2}) = \tan \frac{\pi}{4}, \text{ ou} \\ \tan(\frac{x}{2}) = \tan \frac{\pi}{6}, \text{ ou} \\ \tan(\frac{x}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \subset D_{\text{def}}.$$



2. Est-il vraiment nécessaire d'utiliser un changement de variable pour résoudre les équations suivantes ?

a) $\sin(3x) = \cos x$

c) $\cos x = \tan x$

b) $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x$

d) $\sqrt{3} - \tan x = \frac{1}{\cos x}$

a) $\sin(3x) = \cos x, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$

Cette équation se ramène à une équation élémentaire de la façon suivante :

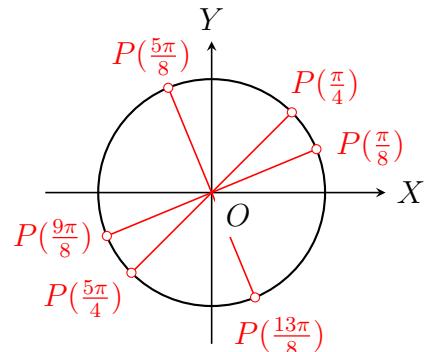
$$\sin(3x) = \cos x \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

On la résout comme telle :

$$\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \left[\frac{\pi}{2} - x\right] + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



b) L'équation $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x$ n'a de sens que si $\cos x \neq 0$,

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On peut alors amplifier les deux membres de cette équation par $\cos x$.

$$\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x - \sin x \cos x = 0$$

Cette équation, après factorisation, se ramène à deux équations élémentaires :

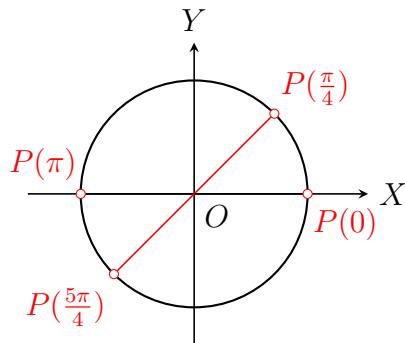
$$\sin^2 x - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x - \cos x = 0.$$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

- $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0$
 $\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \subset D_{\text{def}}.$$



c) $\cos x = \tan x, D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

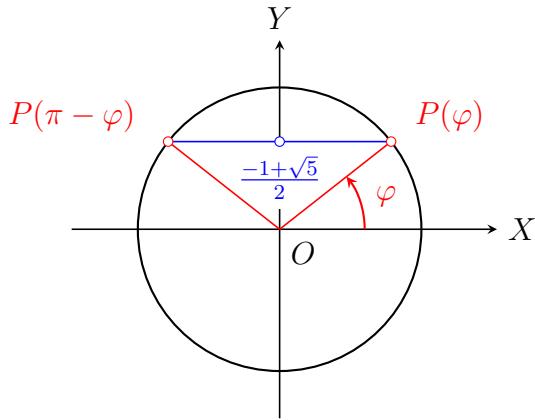
Cette équation se ramène aisément à un trinôme du deuxième degré en $\sin x$:

$$\cos x = \tan x \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Soit $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin \varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, alors

$$S = \{ \varphi + 2k\pi, \pi - \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \} \subset D_{\text{def}}.$$



d) $\sqrt{3} - \tan x = \frac{1}{\cos x}$, $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Cette équation se ramène à une équation trigonométrique linéaire et se résout donc comme telle :

$$\begin{aligned} \sqrt{3} - \tan x = \frac{1}{\cos x} &\Leftrightarrow \sqrt{3} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Or les valeurs $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ n'appartiennent pas au domaine de définition.

D'où : $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Résoudre l'inéquation suivante : $1 + \frac{\sin x}{1 + \cos x} > 2(\sin x - \cos x)$

$$1 + \frac{\sin x}{1 + \cos x} > 2(\sin x - \cos x), \quad D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aucun des trois tests n'étant positif, on pose $z = \tan(\frac{x}{2})$. Ce changement de variable est défini pour tout x dans D_{def} .

Et l'inéquation devient :

$$1 + \frac{2z}{1+z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}} > 2 \left(\frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2} \right)$$

$$1 + \frac{2z}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{2} - 2 \frac{z^2+2z-1}{1+z^2} > 0$$

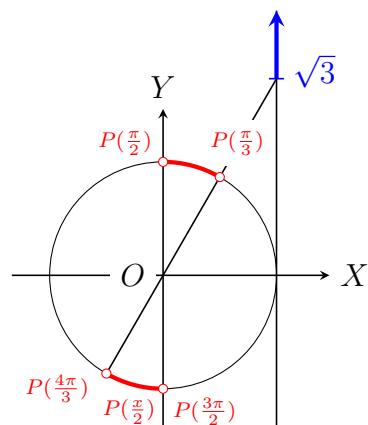
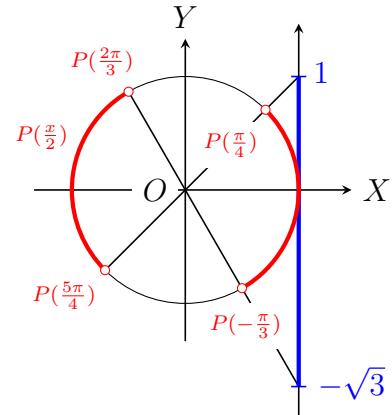
$$\frac{z^3 - z^2 - 3z + 3}{1+z^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{z^2(z-1) - 3(z-1)}{1+z^2} > 0$$

$$\frac{(z-1)(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})}{1+z^2} > 0 \Leftrightarrow (z-1)(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3}) > 0$$

z	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$z-1$	-	-	0	+	+
$z-\sqrt{3}$	-	-	-	0	+
$z+\sqrt{3}$	-	0	+	+	+
$(z-1)(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})$	-	0	+	0	+

$$(z-1)(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z \in]-\sqrt{3}, 1[& (1) \\ \text{ou} \\ z \in]\sqrt{3}, \infty[& (2) \end{cases}$$

(1) $z \in]-\sqrt{3}, 1[$
 $\tan(\frac{x}{2}) \in]-\sqrt{3}, 1[$
 $-\frac{\pi}{3} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + k\pi$
 $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



(2) $z \in]\sqrt{3}, \infty[$
 $\tan(\frac{x}{2}) \in]\sqrt{3}, \infty[$
 $\frac{\pi}{3} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi$
 $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right] \right)$$

