Corrigé 5

1. Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$

b) $\sin x + 2\cos x = 9$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,[\,\sin(3x) + \cos(3x)\,] = 1$

d) $\sin(2x) - \cos(2x) + 1 = 0\,, \qquad -5\pi \leq x \leq -3\pi$

e) $\sin(\frac{x}{2}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0\,, \qquad -\pi \leq x \leq 0$

---

a) **On se ramène à une équation élémentaire en sinus**

Il s'agit de transformer l'équation $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ en une équation élémentaire de la forme

$$\sin(x+\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{c}\,.$$

- Normalisation

  L'équation $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ est du type $a\,\sin x + b\,\cos x = p$, avec $\sqrt{a^2+b^2} = 2\,.$

  On divise les deux membres de cette équation par ce coefficient de normalisation :

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

- Transformation

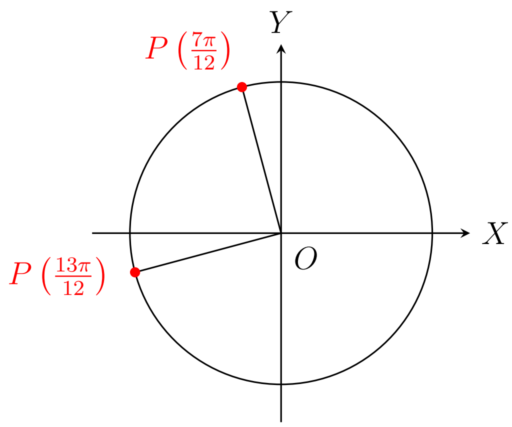
$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin x - \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right).$$

- Résolution

$$\sin\left(x-\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$



$$S = \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\,,\ \frac{13\pi}{12} + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ou bien on se ramène à une équation élémentaire en cosinus

Il s'agit de transformer l'équation $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ en une équation élémentaire de la forme

$$\cos(x+\varphi') = \frac{\sqrt{2}}{c}\,.$$

- Normalisation

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

- Transformation

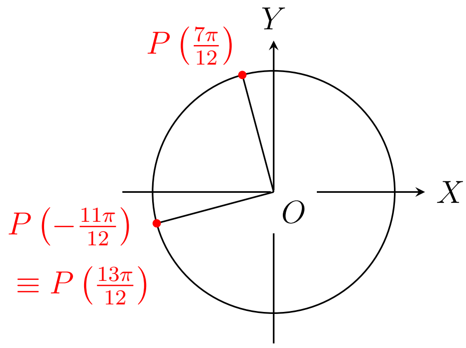
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad &\Leftrightarrow\quad \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\sin x - \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow\quad \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cos x - \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow\quad \cos\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

- Résolution

$$\cos\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x+\frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{12}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{11\pi}{12}+2k\pi \end{array}\right. \qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$



$$S = \left\{-\frac{11\pi}{12}+2k\pi\,,\ \frac{7\pi}{12}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{7\pi}{12}+2k\pi\,,\ \frac{13\pi}{12}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

b)
- Normalisation

$$\sin x + 2\cos x = 9 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{9}{\sqrt{5}}\,.$$

- Transformation

Il existe φ, tel que $\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{9}{\sqrt{5}} \quad &\Leftrightarrow\quad \sin(\varphi)\sin x + \cos(\varphi)\cos x = \frac{9}{\sqrt{5}}\\ &\Leftrightarrow\quad \cos(x-\varphi) = \frac{9}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

- Résolution

L'équation $\cos(x-\varphi) = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$ n'admet pas de solution car $\dfrac{9}{\sqrt{5}} > 1$.

(On aurait pu le constater dès l'étape de normalisation.)

c) L'équation linéaire est déjà normalisée.

- Transformation
  - Transformation en cosinus

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,[\,\sin(3x)+\cos(3x)\,]=1 \;\Leftrightarrow\; \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\,\sin(3x)+\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\,\cos(3x)=1$$
$$\Leftrightarrow\; \cos\left(3x-\tfrac{\pi}{4}\right)=1\,.$$

  - Transformation en sinus

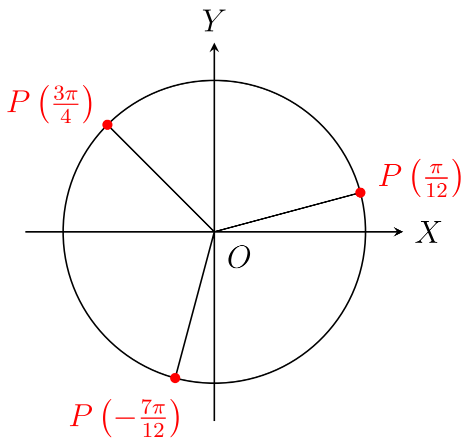
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,[\,\sin(3x)+\cos(3x)\,]=1 \;\Leftrightarrow\; \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\,\sin(3x)+\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\,\cos(3x)=1$$
$$\Leftrightarrow\; \sin\left(3x+\tfrac{\pi}{4}\right)=1\,.$$

- Résolution
  - Résolution de l'équation en cosinus

$$\begin{aligned} & \cos\left(3x-\tfrac{\pi}{4}\right)=1 \\ \Leftrightarrow\;& 3x-\tfrac{\pi}{4}=2k\pi \\ \Leftrightarrow\;& 3x=\tfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ \Leftrightarrow\;& x=\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{2k\pi}{3}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

  - Résolution de l'équation en sinus

$$\begin{aligned} & \sin\left(3x+\tfrac{\pi}{4}\right)=1 \\ \Leftrightarrow\;& 3x+\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ \Leftrightarrow\;& 3x=\tfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ \Leftrightarrow\;& x=\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{2k\pi}{3}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$



$$S=\left\{\,\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{2k\pi}{3}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,\right\}.$$

d) • Normalisation

$$\sin(2x)-\cos(2x)+1=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

- Transformation

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\; \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\,\cos(2x)-\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\,\sin(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\; \cos\left(2x+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right).$$

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cos\left(2x+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\,, & \text{ou} \\ 2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\,, & k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

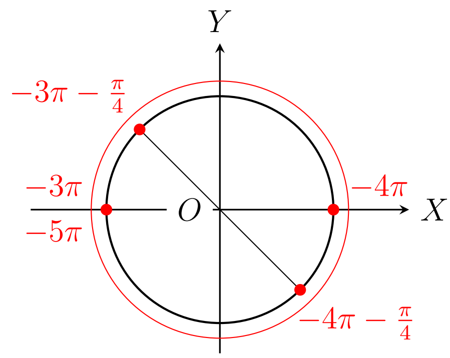
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x=k\pi\,, & \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\,, & k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

- Résolution sur l'intervalle $[-5\pi\,,\,-3\pi\,]$

$x=-5\pi\,,\quad x=-4\pi-\frac{\pi}{4}\,,\quad x=-4\pi\,,$

$x=-3\pi-\frac{\pi}{4}\,,\quad x=-3\pi\,.$

$$S=\left\{-5\pi\,,\,-\frac{17\pi}{4}\,,\,-4\pi\,,\,-\frac{13\pi}{4}\,,\,-3\pi\right\}.$$



e) L'équation $\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0$ est une équation trigonométrique linéaire particulière car le terme constant est nul.

- Résolution sur $\mathbb{R}$
  - Première méthode de résolution

    On utilise la technique de résolution des équations linéaires.

$$\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)+\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

  - Deuxième méthode de résolution

    On se ramène à une équation élémentaire en tangente.

$$\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)+\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)=-\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\tfrac{x}{2}\right)=-1\,,\quad \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

    Remarque :

    les x vérifiant $\cos(\frac{x}{2})=0$ ne sont pas solutions : $\cos(\frac{x}{2})=0 \Leftrightarrow \sin(\frac{x}{2})=\pm 1\,.$

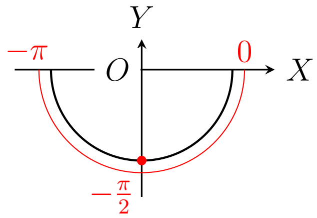
- ◦ Troisième méthode de résolution

  Les coefficients des termes en sinus et cosinus étant identiques $(a = b)$, on peut se ramener à une équation élémentaire en sinus ou en cosinus.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{x}{2}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) = -\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) = -\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{x}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) = \sin\left(-\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{x}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{x}{2} = -\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{x}{2} + 2k\pi\,, \quad \text{ou} \\ \tfrac{x}{2} = \pi - (-\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{x}{2}) + 2k\pi \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

- Résolution sur l'intervalle $[-\pi\,,\,0\,]$

  Il n'y a qu'une solution, $S = \left\{-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.



2. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x > 1$

b) $-\sqrt{3}\sin(2x) + \cos(2x) \leq -\sqrt{2}$, $\qquad 5\pi \leq x \leq 6\pi$

c) $\sin x \geq \cos x$, $\qquad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$

---

a) On résout les inéquations linéaires comme les équations linéaires.

On se ramène à une inéquation élémentaire en cosinus

- Normalisation

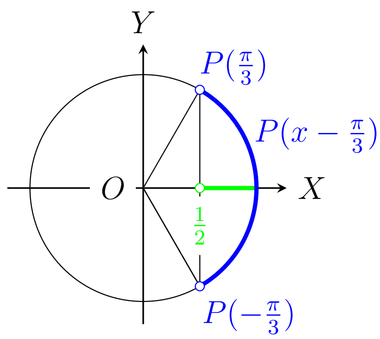
$$\cos x + \sqrt{3}\,\sin x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin x > \frac{1}{2}\,.$$

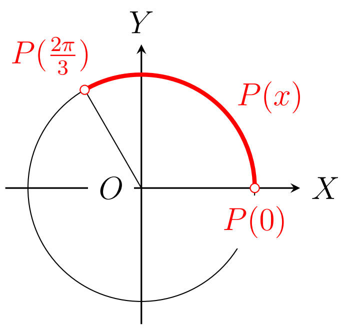
- Transformation

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin x > \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\,\cos x + \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\,\sin x > \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

- Résolution

$$\cos\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$





$$\Leftrightarrow \quad 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \qquad S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\, 2k\pi\,,\ \tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \,\right[\,.$$

Ou bien on se ramène à une inéquation élémentaire en sinus

- Normalisation

$$\cos x + \sqrt{3}\,\sin x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin x > \frac{1}{2}\,.$$

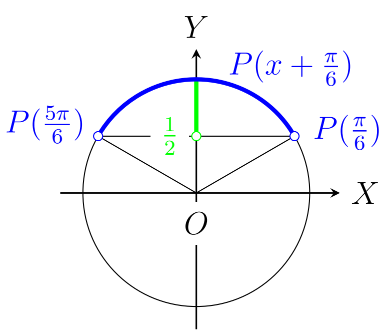
- Transformation

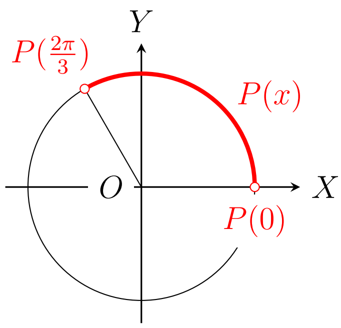
$$\frac{1}{2}\,\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\,\cos x + \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\,\sin x > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x + \tfrac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}\,.$$

- Résolution

$$\sin\left(x + \tfrac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$





$$\Leftrightarrow \quad 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \qquad S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\, 2k\pi\,,\ \tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \,\right[\,.$$

b) On se ramène à une inéquation élémentaire en cosinus

- Normalisation

$$-\sqrt{3}\,\sin(2x) + \cos(2x) \le -\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(2x) + \frac{1}{2}\,\cos(2x) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

- Transformation

$$\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) \le -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos(2x) - \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin(2x) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

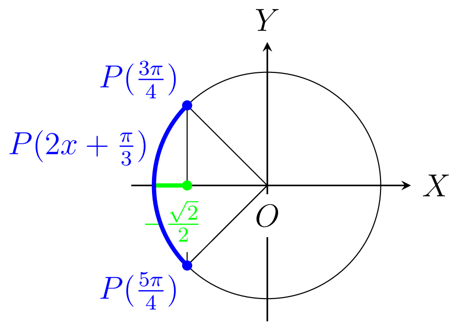
$$\Leftrightarrow\quad \cos\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

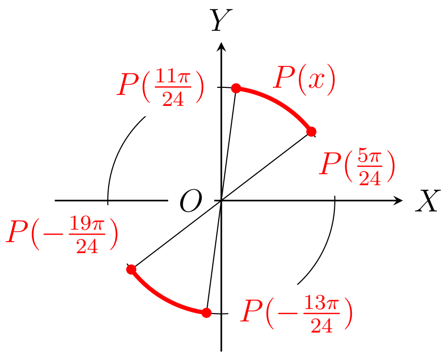
- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cos\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le 2x + \frac{\pi}{3} \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \le 2x \le \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$$

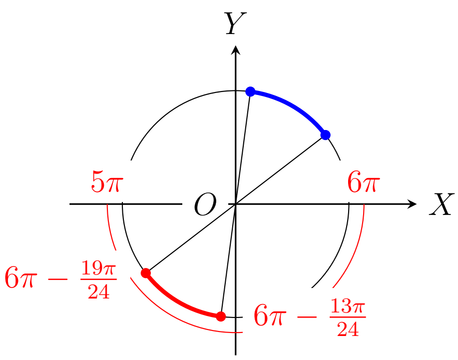
$$\Leftrightarrow\quad \frac{5\pi}{24} + k\pi \le x \le \frac{11\pi}{24} + k\pi\,.$$





- Résolution sur l'intervalle $[\,5\pi\,,\,6\pi\,]$

$$5\pi + \frac{5\pi}{24} \le x \le 5\pi + \frac{11\pi}{24}\,, \qquad \text{ou} \qquad 6\pi - \frac{19\pi}{24} \le x \le 6\pi - \frac{13\pi}{24}\,.$$



$$S = \left[\frac{125\pi}{24}\,,\ \frac{131\pi}{24}\right].$$

c) Sur l'intervalle $[\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{2}\,]$, $\sin x$ et $\cos x$ sont de signes variables, il est difficile de se ramener à une inéquation élémentaire en tagente ou en cotangente.
Il est préférable d'utiliser la technique de résolution des équations linéaires.

- Normalisation

$$\sin x \ge \cos x \quad\Leftrightarrow\quad \cos x - \sin x \le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \le 0\,.$$

- Transformation

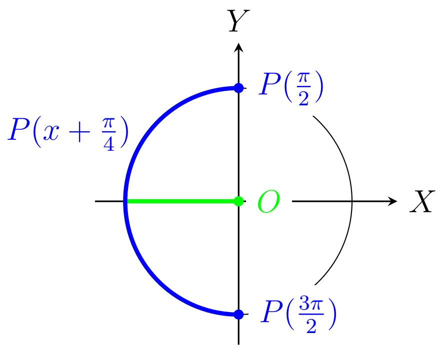
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos x-\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\sin x\leq 0$$

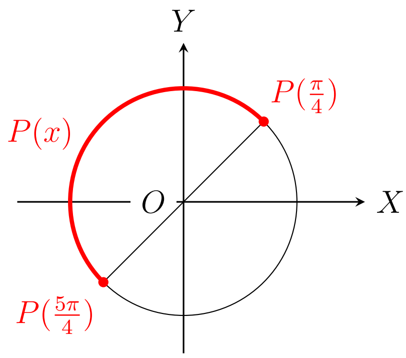
$$\Leftrightarrow\quad \cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)\leq 0.$$

- Résolution sur $\mathbb{R}$

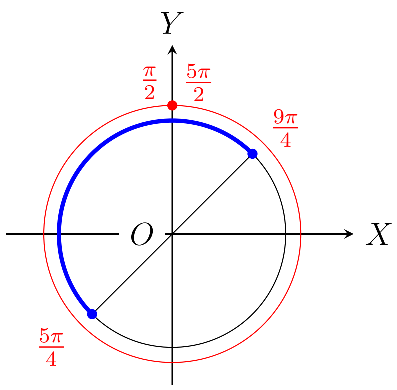
$$\cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\pi}{2}+2k\pi\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi\,,\qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\pi}{4}+2k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{4}+2k\pi\,.$$





- Résolution sur l'intervalle $\left[\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{2}\,\right]$



$$S=\left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{9\pi}{4}\,,\,\frac{5\pi}{2}\right].$$

3. Factoriser avant de résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\sin(2x)-2\cos^2 x+2\cos x=0$

b) $\cos(2x)+\sin x+\cos x>0\,,\qquad 0\leq x\leq 2\pi$

---

a) $\sin(2x)-2\cos^2 x+2\cos x=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin x\,\cos x-2\cos^2 x+2\cos x=0$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cos x\,(\sin x-\cos x+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\cos x=0 \qquad \text{ou}\\ \sin x-\cos x+1=0\end{cases}$$

- $\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$
- $\sin x - \cos x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\tfrac{\pi}{4}\,\cos x - \sin\tfrac{\pi}{4}\,\sin x = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x+\tfrac{\pi}{4}) = \cos\tfrac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

D'où $\quad S = \left\{\, \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \,\right\}.$

b) $\cos(2x) + \sin x + \cos x > 0\,, \qquad 0 \le x \le 2\pi\,.$

$$\cos(2x) + \sin x + \cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + \sin x > 0$$

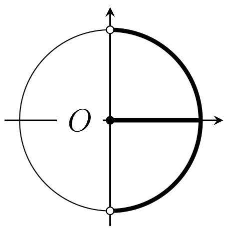
$$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\,(\cos x - \sin x) + (\cos x + \sin x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\ [\,(\cos x - \sin x) + 1\,] > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \cos x + \sin x > 0 & (i) \\ \text{et} & \\ \cos x - \sin x + 1 > 0 & (ii) \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ll} \cos x + \sin x < 0 & (iii) \\ \text{et} & \\ \cos x - \sin x + 1 < 0 & (iv) \end{array}\right.$$

(i) $\cos x + \sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x > 0$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\tfrac{\pi}{4}\,\cos x + \sin\tfrac{\pi}{4}\,\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x-\tfrac{\pi}{4}) > 0$$



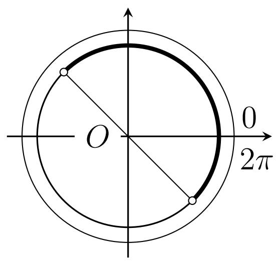
Résolution sur $\mathbb{R}$:

$$-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x - \tfrac{\pi}{4} < \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$-\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \tfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\,.$$

Résolution sur $[\,0\,,\,2\pi\,]$:

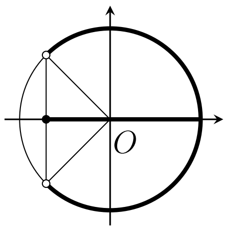
$$S_i = [\,0\,,\ \tfrac{3\pi}{4}\,[\ \cup\ ]\,\tfrac{7\pi}{4}\,,\ 2\pi\,]\,.$$



(iii) On en déduit l'ensemble solution de $\cos x + \sin x < 0$: $\ S_{iii} =]\,\frac{3\pi}{4}\,,\ \frac{7\pi}{4}\,[\,.$

(ii) $\cos x - \sin x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\tfrac{\pi}{4}\,\cos x - \sin\tfrac{\pi}{4}\,\sin x > -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x+\tfrac{\pi}{4}) > -\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$



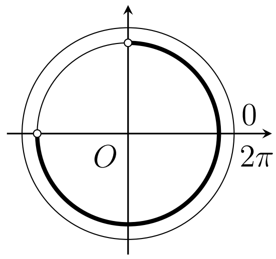
Résolution sur $\mathbb{R}$:

$$-\tfrac{3\pi}{4} + 2k\pi < x + \tfrac{\pi}{4} < \tfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$-\pi + 2k\pi < x < \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,.$$

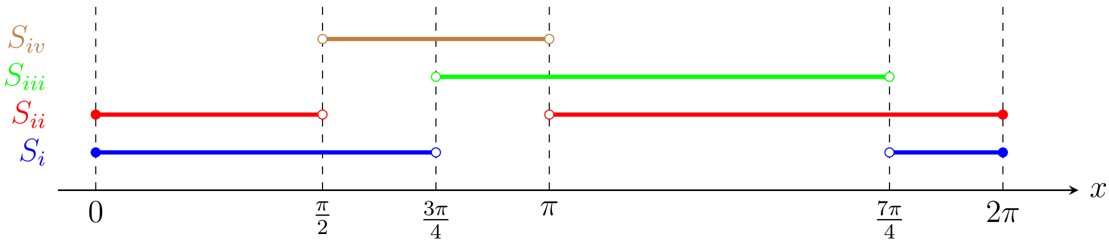
Résolution sur $[\,0\,,\,2\pi\,]$:

$$S_{ii} = [\,0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\,[\,\cup\,]\,\pi\,,\,2\pi\,]\,.$$



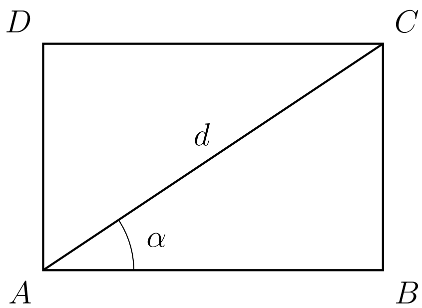
(iv) On en déduit l'ensemble solution de $\cos x - \sin x + 1 < 0$: $S_{iv} =]\,\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\,[\,.$

Et pour finir :



$$S = (S_i \cap S_{ii})\,\cup\,(S_{iii} \cap S_{iv}) = \left[0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\right[\,\cup\,\left]\tfrac{3\pi}{4}\,,\,\pi\right[\,\cup\,\left]\tfrac{7\pi}{4}\,,\,2\pi\right]\,.$$

4. D'un rectangle $ABCD$ on connaît la longueur d de la diagonale AC, et on fait varier l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$.



a) Pour quelles valeurs de l'angle α le périmètre P de ce rectangle satisfait-il la relation : $P \geq d\sqrt{6}$?

b) Pour quelle valeur de l'angle α le périmètre est-il maximal ?

Que vaut-il ?

---

a) Expression du périmètre P en fonction de d et de α :

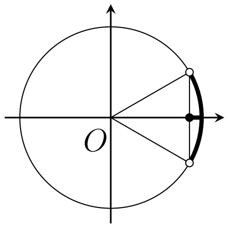
$$P = 2\,(\,AB + BC\,) \quad \text{avec} \quad AB = d\,\cos\alpha \quad \text{et} \quad BC = d\,\sin\alpha\,, \quad \alpha \in \left]\,0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\right[\,.$$

$$P = 2d\,(\cos\alpha + \sin\alpha)\,, \quad \alpha \in \left]\,0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\right[\,.$$

Résolution de l'inéquation :

$$P \geq d\sqrt{6} \quad \Leftrightarrow \quad 2d\,(\cos\alpha + \sin\alpha) \geq d\sqrt{6} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\cos\alpha + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\sin\alpha \geq \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\tfrac{\pi}{4}\,\cos\alpha + \sin\tfrac{\pi}{4}\,\sin\alpha \geq \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\alpha - \tfrac{\pi}{4}) \geq \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$



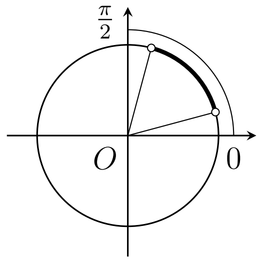
Résolution sur $\mathbb{R}$:

$$-\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \alpha - \tfrac{\pi}{4} \leq \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\tfrac{\pi}{12} + 2k\pi \leq \alpha \leq \tfrac{5\pi}{12} + 2k\pi\,.$$

Résolution sur $]\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$:

$$S = [\,\tfrac{\pi}{12}\,,\ \tfrac{5\pi}{12}\,]\,.$$



b) Pour déterminer la valeur de l'angle α pour laquelle le périmètre est maximum, on exprime P à l'aide d'une seule fonction sinus ou cosinus :

$$P = 2d\,(\cos\alpha + \sin\alpha) = 2d\,\sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) = 2d\,\sqrt{2}\,\cos(\alpha - \tfrac{\pi}{4})\,.$$

Le périmètre P est maximum lorsque $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 1$.

$$\cos(\alpha - \tfrac{\pi}{4}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \tfrac{\pi}{4} = 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Or $\alpha \in\,]\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Et le périmètre vaut alors $P = 2d\,\sqrt{2}$.