

Corrigé 4

1. Calculer sans machine les valeurs suivantes :

a) $\cos(\frac{7\pi}{12})$

c) $\tan(\frac{5\pi}{12})$

b) $\sin(\frac{\pi}{12})$

d) $\tan(\frac{\pi}{8})$

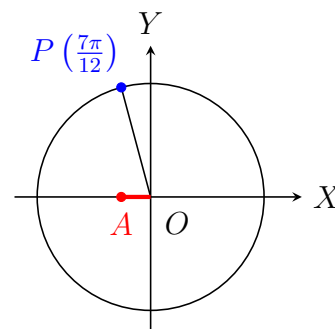
a) En utilisant les formules d'addition, on obtient un résultat de forme plus agréable qu'en utilisant les formules de bisection.

- Décomposition de $\frac{7\pi}{12}$ en une somme de deux valeurs remarquables

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{4\pi + 3\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

- Calcul de $A = \cos(\frac{7\pi}{12})$

$$\begin{aligned} A &= \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{3}) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

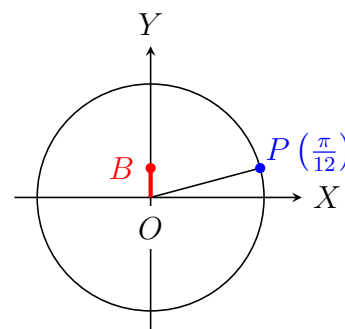


- b) • Décomposition de $\frac{\pi}{12}$ en une différence de deux valeurs remarquables

$$\frac{\pi}{12} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

- Calcul de $B = \sin(\frac{\pi}{12})$

$$\begin{aligned} B &= \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$



On constate que $B = -A$. On aurait pu le vérifier directement :

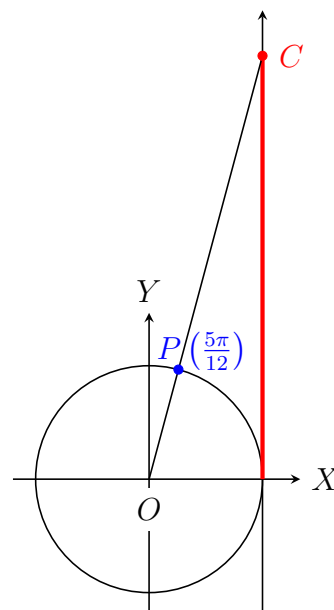
$$B = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -A.$$

- c) • Décomposition de $\frac{5\pi}{12}$ en une somme de deux valeurs remarquables

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi + 2\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}.$$

- Calcul de $C = \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned} C &= \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} \\ &= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{6} \\ &= 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$



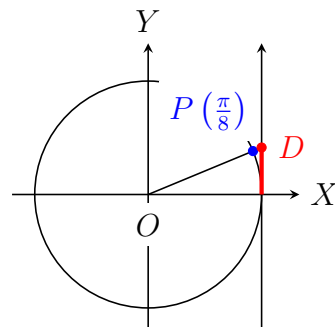
- d) Ne pouvant pas décomposer $\frac{\pi}{8}$ en une somme ou une différence de deux valeurs remarquables, on utilise les formules de bisection.

$P\left(\frac{\pi}{8}\right)$ appartient au premier quadrant, donc $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est positif.

$$\begin{aligned} D &= \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{\pi/4}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Et en amplifiant, sous la racine, par le conjugué du dénominateur,

$$D = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4 - 2}} = \frac{|2 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$



2. Calculer le sinus et le cosinus de l'angle $2x$ dans les deux cas suivants :

a) $\sin x = \pm \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ b) $\cot x = \pm 2\sqrt{2}$, $3\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$

a) $\sin x = \pm \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

Pour calculer le sinus et le cosinus de l'angle $2x$ nous avons besoin de $\sin x$ et de $\cos x$.

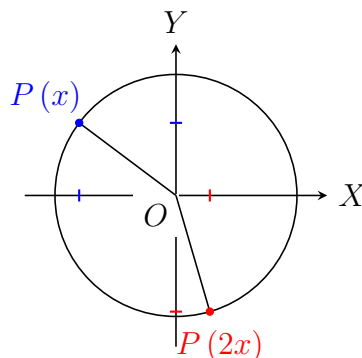
$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \Rightarrow P(x) \in II \Leftrightarrow \sin x \geq 0 \quad \text{et} \quad \cos x \leq 0.$$

D'où $\sin x = \frac{3}{5}$

et $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{4}{5}$.

• $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = -\frac{24}{25}$,

• $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{7}{25}$.



b) $\cot x = \pm 2\sqrt{2}$, $3\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$.

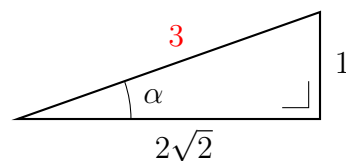
On détermine $\sin x$ et $\cos x$ en deux étapes.

- Signe de $\sin x$ et de $\cos x$.

$$3\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \Rightarrow P(x) \in III \Leftrightarrow \sin x \leq 0 \quad \text{et} \quad \cos x \leq 0.$$

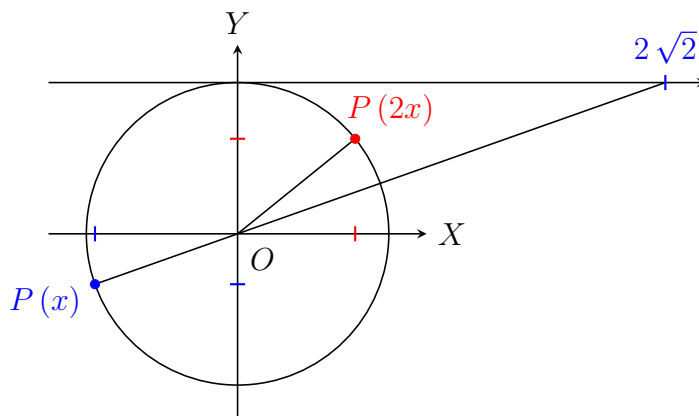
- Calcul de $|\sin x|$ et $|\cos x|$ à l'aide de l'angle géométrique aigu α défini par $\cot \alpha = 2\sqrt{2}$.

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



En Conclusion : $\sin x = -\frac{1}{3}$ et $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D'où : $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ et $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{7}{9}$.



3. Calculer le sinus et le cosinus de l'angle $\frac{x}{2}$ dans les deux cas suivants :

a) $\cos x = \pm \frac{3}{5}$, $-\frac{7\pi}{2} < x < -3\pi$ b) $\tan x = -\frac{4}{3}$, $\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2}$

a) $\cos x = \pm \frac{3}{5}$, $-\frac{7\pi}{2} < x < -3\pi$.

Localisation de $P(x)$:

$$-\frac{7\pi}{2} < x < -3\pi \Rightarrow P(x) \in II \Leftrightarrow \cos x \leq 0, \text{ donc } \cos x = -\frac{3}{5}.$$

Localisation de $P(\frac{x}{2})$:

$$x \in]-\frac{7\pi}{2}, -3\pi[\Leftrightarrow \frac{x}{2} \in]-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}[\Rightarrow P(\frac{x}{2}) \in I.$$

$$\text{D'où : } \sin \frac{x}{2} \geq 0 \text{ et } \cos \frac{x}{2} \geq 0.$$

Calcul de $\sin \frac{x}{2}$ et de $\cos \frac{x}{2}$:

$$\sin \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ et } \cos \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

b) L'angle x est défini par $\tan x = -\frac{4}{3}$ et $\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2}$.

• Localisation de $P(x)$:

$$\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2} \Rightarrow P(x) \in I \cup IV \Rightarrow \cos x \geq 0.$$

• Calcul de $\cos x$

$$\tan x = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } \begin{cases} \sin x = -4\lambda \\ \cos x = 3\lambda \end{cases}$$

On détermine le coefficient de proportionnalité λ à l'aide de Pythagore :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 + (-4\lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{5}.$$

$$\cos x \geq 0, \quad \cos x = +\frac{3}{5}.$$

• Localisation de $P(\frac{x}{2})$:

$$\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{7\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{9\pi}{4} \Rightarrow P(\frac{x}{2}) \in I \cup IV.$$

Cette localisation de $P(\frac{x}{2})$ est insuffisante pour déterminer le signe de $\sin \frac{x}{2}$ et de $\cos \frac{x}{2}$. On recommence en essayant d'être plus précis.

$$\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2} \text{ et } \tan x < 0 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{2} < x < 4\pi \Leftrightarrow \frac{7\pi}{4} < \frac{x}{2} < 2\pi$$

$$\Rightarrow P(\frac{x}{2}) \in IV \Rightarrow \sin \frac{x}{2} \leq 0 \text{ et } \cos \frac{x}{2} \geq 0.$$

• Calcul de $\sin \frac{x}{2}$ et de $\cos \frac{x}{2}$:

$$\circ \sin \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\circ \cos \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

4. Si $\tan x = \frac{1}{3}$ et $\tan y = -\frac{1}{7}$, calculer sans machine, l'angle $\varphi = 2x - y$

a) sachant que x et y sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

b) sachant que x et y sont compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Pour déterminer la valeur exacte de l'angle $\varphi = 2x - y$, nous allons

- calculer une fonction trigonométrique de φ ,
- puis localiser $P(\varphi)$ sur le cercle trigonométrique de façon suffisamment précise pour en déduire la valeur de φ .

Connaissant $\tan x$ et $\tan y$, il est plus simple de calculer $\tan \varphi$ plutôt que $\cos \varphi$ ou $\sin \varphi$.

$$\tan \varphi = \tan(2x - y) = \frac{\tan(2x) - \tan y}{1 + \tan(2x) \tan y} \quad \text{avec} \quad \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{3}{4}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{7})}{1 + \frac{3}{4}(-\frac{1}{7})} = 1. \quad \text{D'où : } \varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour trouver la bonne détermination de φ , il faut localiser l'angle φ à l'aide des localisations données de x et de y .

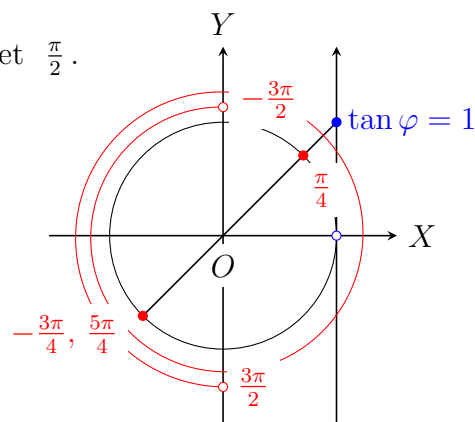
a) Les angles x et y sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Donc } 2x \in [-\pi, \pi]$$

$$\text{et } -y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

$$\text{d'où } \varphi \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$

Cette localisation de $P(\varphi)$ sur un tour et demi n'est pas assez précise pour conclure.



Il faut recommencer en essayant d'être plus précis.

$$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \text{mais } \tan x > 0,$$

$$\text{donc } x \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

$$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \text{mais } \tan y < 0,$$

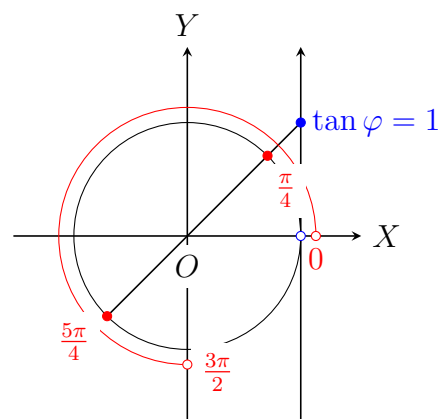
$$\text{donc } y \in]-\frac{\pi}{2}, 0[.$$

$$\text{D'où } 2x \in]0, \pi[$$

$$\text{et } -y \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Rightarrow \varphi \in]0, \frac{3\pi}{2}[.$$

Cette localisation de φ n'est toujours pas assez précise pour conclure.



On recommence en essayant d'être encore plus précis.

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{mais} \quad 0 < \tan x < 1,$$

$$\text{donc} \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[.$$

$$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{mais} \quad -1 < \tan y < 0,$$

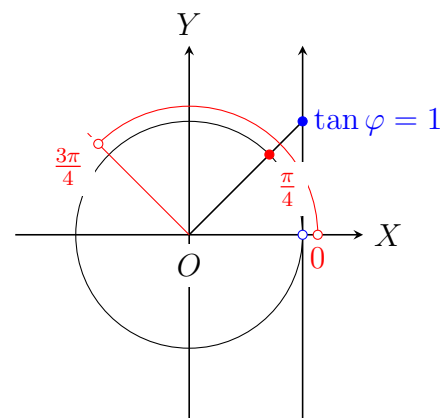
$$\text{donc} \quad y \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[.$$

$$\text{D'où} \quad 2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad -y \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$$

$$\Rightarrow \quad \varphi \in \left]0, \frac{3\pi}{4}\right[.$$

On peut donc conclure :

$$\tan \varphi = 1 \quad \text{et} \quad \varphi \in \left]0, \frac{3\pi}{4}\right[\Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$



- b) Les angles x et y sont compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

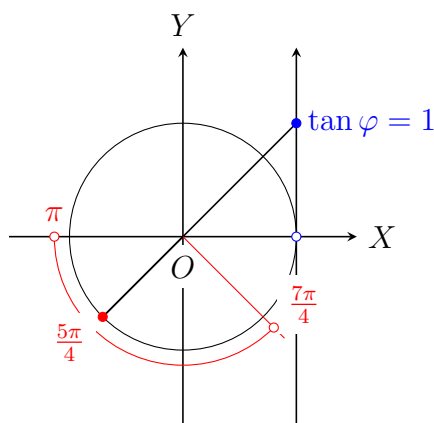
On procède de façon analogue.

$$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \text{mais} \quad 0 < \tan x < 1, \quad \text{donc} \quad x \in \left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[.$$

$$\text{De même} \quad y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \text{mais} \quad -1 < \tan y < 0, \quad \text{donc} \quad y \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[.$$

$$\text{D'où} \quad 2x \in \left]2\pi, \frac{5\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad -y \in \left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right[\Rightarrow \quad \varphi \in \left]\pi, \frac{7\pi}{4}\right[.$$

$$\text{On peut donc conclure :} \quad \tan \varphi = 1 \quad \text{et} \quad \varphi \in \left]\pi, \frac{7\pi}{4}\right[\Rightarrow \quad \varphi = \frac{5\pi}{4}.$$



5. Calculer sans calculatrice la valeur de $\tan(x+y)$ sachant que $\tan x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que y est défini par $\sin y = \cos(\frac{y}{3})$ avec $\frac{19\pi}{4} \leq y \leq 5\pi$.

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}. \quad \text{On connaît } \tan x, \text{ il faut donc déterminer } \tan y.$$

Pour cela, on cherche à résoudre l'équation $\sin y = \cos(\frac{y}{3})$ sur l'intervalle $\left[\frac{19\pi}{4}, 5\pi\right]$.

$$\begin{aligned} \sin y = \cos\left(\frac{y}{3}\right) &\Leftrightarrow \sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4y}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{2y}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3\pi}{8} + \frac{3k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ y = \frac{3\pi}{4} + 3k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'intervalle de résolution $\left[\frac{19\pi}{4}, 5\pi\right]$ est "petit", on cherche les solutions par tâtonnement.

- Les solutions de type $y = \frac{3\pi}{4} + 3k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ n'appartiennent pas à $\left[\frac{19\pi}{4}, 5\pi\right]$, car
 - si $k = 1$, $y = \frac{3\pi}{4} + 3\pi = \frac{15\pi}{4} < \frac{19\pi}{4}$,
 - si $k = 2$, $y = \frac{3\pi}{4} + 6\pi > 5\pi$.
- Observons les solutions de type $y = \frac{3\pi}{8} + \frac{3k\pi}{2}$ pour différentes valeurs de $k \in \mathbb{Z}$:
 - si $k = 2$, $\frac{3\pi}{8} + 3\pi = \frac{27\pi}{8} < \frac{19\pi}{4}$,
 - si $k = 3$, $y = \frac{3\pi}{8} + \frac{9\pi}{2} = \frac{19\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \in \left[\frac{19\pi}{4}, 5\pi\right]$,
 - si $k = 4$, $y = \frac{3\pi}{8} + 6\pi > 5\pi$.

L'unique solution appartenant à l'intervalle $\left[\frac{19\pi}{4}, 5\pi\right]$ est $y = \frac{19\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{39\pi}{8}$.

Et $\tan\left(\frac{39\pi}{8}\right) = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$. (exercice 1. d))

$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + (1 - \sqrt{2})}{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 - \sqrt{2})} = \frac{-\sqrt{2} + 2(1 - \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}(1 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{-3\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = -3 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

6. Factoriser les expressions suivantes :

a) $\sin(5x) - \sin x$

b) $\cos^2(3x) - \cos^2 x$

a) On utilise les formules de transformation Sommes - Produits.

$$\sin(5x) - \sin x = 2 \cos\left(\frac{5x+x}{2}\right) \sin\left(\frac{5x-x}{2}\right) = 2 \cos(3x) \sin(2x).$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos^2(3x) - \cos^2 x &= [\cos(3x) - \cos x][\cos(3x) + \cos x] \\ &= [-2 \sin(2x) \sin x][2 \cos(2x) \cos x] = -4 \sin(2x) \cos(2x) \sin x \cos x \\ &= -\sin(4x) \sin(2x). \end{aligned}$$

7. Factoriser avant de résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(3x) + \sin x = \sin(2x)$

c) $\sin^2(5x) = \sin^2 x$

b) $\cos(3x) + \cos(5x) = \cos x$

d) $(1 + \tan x) [\cos(7x) + \cos x] = 0$

a) $\sin(3x) + \sin x = \sin(2x), \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$

Factorisation

$$\begin{aligned} \sin(3x) + \sin x = \sin(2x) &\Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = \sin(2x) \\ &\Leftrightarrow 2 \sin(2x) \cos x = \sin(2x) \\ &\Leftrightarrow 2 \sin(2x) \cos x - \sin(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(2x) [2 \cos x - 1] = 0. \end{aligned}$$

Résolution

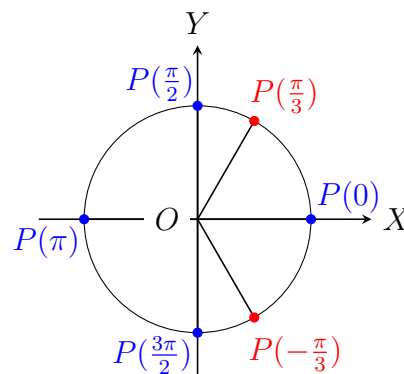
$$\sin(3x) + \sin x = \sin(2x) \Leftrightarrow \sin(2x) [2 \cos x - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x) = 0 \\ \text{ou} \\ 2 \cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

- Résolution de l'équation $\sin(2x) = 0$

$$\begin{aligned} \sin(2x) = 0 &\Leftrightarrow 2x = k\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Résolution de l'équation $2 \cos x - 1 = 0$

$$\begin{aligned} 2 \cos x - 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



On en déduit l'ensemble solution : $S = \left\{ \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

b) $\cos(3x) + \cos(5x) = \cos x, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$

Factorisation

$$\begin{aligned} \cos(5x) + \cos(3x) = \cos x &\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right) = \cos x \\ &\Leftrightarrow 2 \cos(4x) \cos x = \cos x \\ &\Leftrightarrow 2 \cos(4x) \cos x - \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x [2 \cos(4x) - 1] = 0. \end{aligned}$$

Résolution

$$\cos(3x) + \cos(5x) = \cos x \Leftrightarrow \cos x [2 \cos(4x) - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{ou} \\ 2 \cos(4x) - 1 = 0 \end{cases}$$

- Résolution de l'équation $\cos x = 0$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

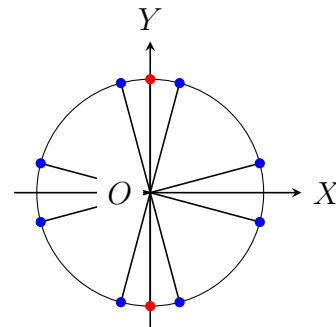
- Résolution de l'équation $2 \cos(4x) - 1 = 0$

$$2 \cos(4x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



$$\text{D'où l'ensemble solution : } S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

c) $\sin^2(5x) = \sin^2 x, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$

Factorisation

$$\sin^2(5x) - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow [\sin(5x) - \sin x] \cdot [\sin(5x) + \sin x] = 0$$

$$\Leftrightarrow [2 \cos(3x) \sin(2x)] \cdot [2 \sin(3x) \cos(2x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow [2 \sin(3x) \cos(3x)] \cdot [2 \sin(2x) \cos(2x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(6x) \sin(4x) = 0.$$

Résolution

$$\sin^2(5x) = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin(6x) \sin(4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(6x) = 0 \\ \text{ou} \\ \sin(4x) = 0 \end{cases}$$

- Résolution de l'équation $\sin(6x) = 0$

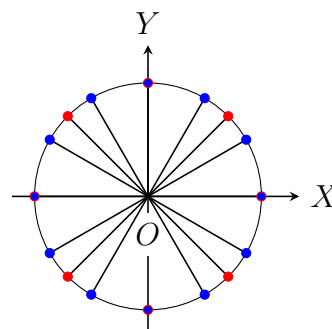
$$\sin(6x) = 0 \Leftrightarrow 6x = k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Résolution de l'équation $\sin(4x) = 0$

$$\sin(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



On en déduit l'ensemble solution :

$$S = \left\{ \frac{k\pi}{6}, \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Remarque

On aurait aussi pu résoudre les équations $\sin(5x) - \sin x = 0$ et $\sin(5x) + \sin x = 0$ comme des équations élémentaires en sinus :

$$\begin{aligned} \bullet \sin(5x) = \sin x &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dots \\ \bullet \sin(5x) = -\sin x &\Leftrightarrow \sin(5x) = \sin(-x) \Leftrightarrow \dots \end{aligned}$$

d) $(1 + \tan x) [\cos(7x) + \cos x] = 0, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

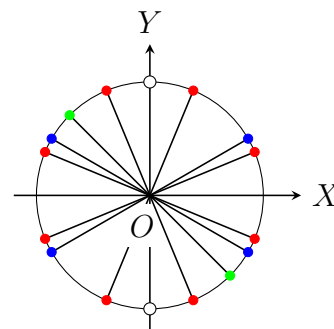
$$(1 + \tan x) [\cos(7x) + \cos x] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \tan x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(7x) + \cos x = 0 \end{cases}$$

- Résolution de l'équation $1 + \tan x = 0$

$$\begin{aligned} 1 + \tan x = 0 &\Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Résolution de l'équation $\cos(7x) + \cos x = 0$

$$\begin{aligned} \cos(7x) + \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos(4x) \cos(3x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(4x) = 0 &\text{ ou } \cos(3x) = 0 \\ \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi &\text{ ou } 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} &\text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



Attention ! Les valeurs $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ne sont pas toutes contenues dans le domaine de définition.

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Remarque :

On aurait aussi pu résoudre l'équation $\cos(7x) + \cos x = 0$ comme une équation élémentaire en cosinus :

$$\cos(7x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos(7x) = -\cos x \Leftrightarrow \cos(7x) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \dots$$

8. Démontrer l'identité suivante : $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

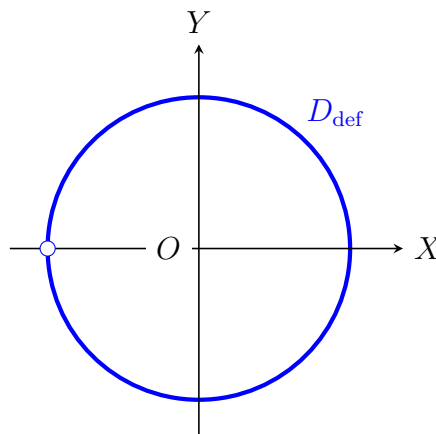
Domaine de définition

- L'expression $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est définie si et seulement si $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
en d'autres termes, si et seulement si $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- L'expression $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ est définie si et seulement si $1 + \cos x \neq 0$.

$$1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ces deux expressions ont donc même domaine de définition :

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$



Les deux expressions sont égales

Pour le montrer, posons $x = 2y$.

On a alors pour tout $x \neq \pi + 2k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin(2y)}{1 + \cos(2y)} = \frac{2 \sin y \cos y}{1 + [2 \cos^2 y - 1]} = \frac{2 \sin y \cos y}{2 \cos^2 y} = \tan y = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

9. Exercice récréatif

Calculer la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$. En déduire la construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique.

Indication : chercher une équation polynomiale satisfaite par $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Posons $x = \cos(\frac{2\pi}{5})$. Par formule de duplication on a :

$$\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2x^2 - 1 \quad \text{et} \quad \cos(\frac{8\pi}{5}) = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

On sait par ailleurs que :

$$\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x.$$

On en déduit que x vérifie l'équation suivante de degré 4 :

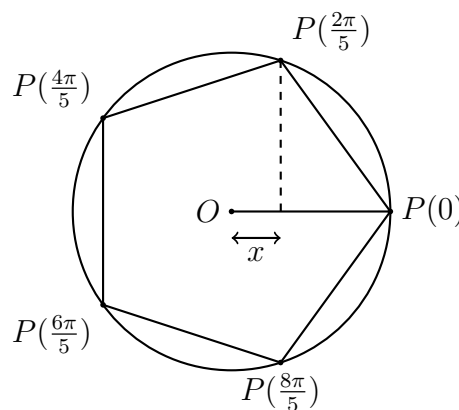
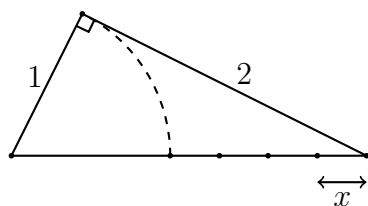
$$8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0.$$

En fait, le raisonnement ci-dessus montre que cette équation est vérifiée par $\cos(\alpha)$ dès que $\cos(4\alpha) = \cos(\alpha)$. En prenant $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ (pour lesquels 4α et α diffèrent d'un multiple de 2π), on voit que 1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines du polynôme ci-dessus. On peut donc factoriser l'expression ci-dessus par $(x-1)(2x+1)$ pour obtenir :

$$(x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1) = 0$$

Comme $x \neq 1, -\frac{1}{2}$, on en déduit que x est racine du dernier facteur, ce qui conduit, par les formules de Viète à $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Il reste à remarquer que x est positif, car $\frac{2\pi}{5}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, pour conclure que $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Pour la construction du pentagone régulier, on commence par construire un segment de longueur x à la règle et au compas : pour cela, on construit deux segments de longueurs respectives 1 et 2 formant entre eux un angle droit puis on fait apparaître la longueur x sur l'hypoténuse du triangle rectangle ainsi construit (qui mesure $\sqrt{5}$ par le théorème de Pythagore).



On reporte ensuite la longueur x obtenue sur l'axe des abscisses du cercle trigonométrique donné, afin de faire apparaître le point $P(\frac{2\pi}{5})$. Les autres sommets du pentagone sont obtenues successivement en reportant la longueur séparant $P(0)$ de $P(\frac{2\pi}{5})$.