

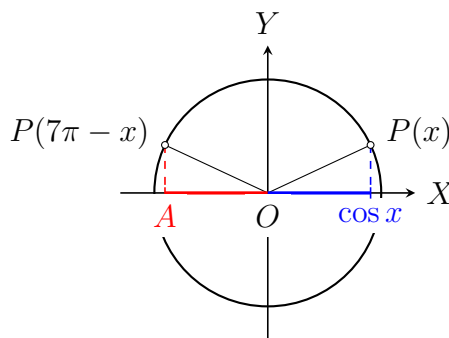
Corrigé 3

1. Exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une fonction trigonométrique de l'angle x uniquement.

a) $A = \cos(7\pi - x)$ c) $C = \sin(\frac{3\pi}{2} - x)$ e) $E = \cot(-\frac{5\pi}{2} - x)$
 b) $B = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ d) $D = \cos(x - \frac{9\pi}{2})$ f) $F = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), n \in \mathbb{N}$

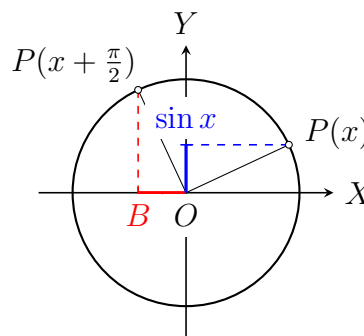
a)

$$\begin{aligned} A &= \cos(7\pi - x) \\ &= \cos[6\pi + (\pi - x)] \\ &= \cos(\pi - x) \\ &= -\cos x. \end{aligned}$$



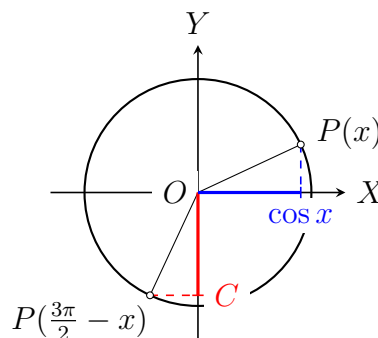
b)

$$\begin{aligned} B &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sin[\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{2})] \\ &= \sin(-x) \\ &= -\sin x. \end{aligned}$$



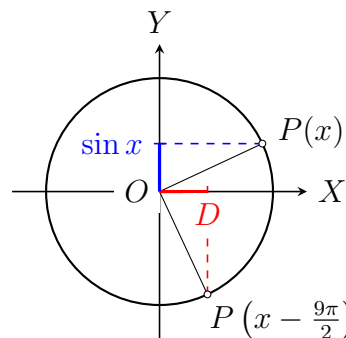
c)

$$\begin{aligned} C &= \sin(\frac{3\pi}{2} - x) \\ &= \cos[\frac{\pi}{2} - (\frac{3\pi}{2} - x)] \\ &= \cos(-\pi + x) \\ &= \cos(\pi - x) \\ &= -\cos x. \end{aligned}$$



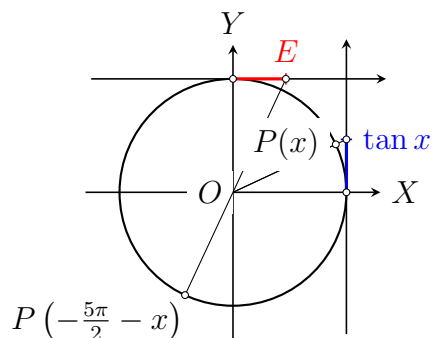
d)

$$\begin{aligned} D &= \cos(x - \frac{9\pi}{2}) \\ &= \sin[\frac{\pi}{2} - (x - \frac{9\pi}{2})] \\ &= \sin(5\pi - x) \\ &= \sin(\pi - x) \\ &= \sin x. \end{aligned}$$



e)

$$\begin{aligned}
 E &= \cot\left(-\frac{5\pi}{2} - x\right) \\
 &= \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{5\pi}{2} - x\right)\right] \\
 &= \tan(3\pi + x) \\
 &= \tan x.
 \end{aligned}$$

f) $F = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$: $F = \sin x$.
- Si $n = 1$: $F = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.
- Si $n = 2$: $F = \sin(x + \pi) = -\sin x$.
- Si $n = 3$: $F = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x$.
- Si $n = 4$: $F = \sin(x + 2\pi) = \sin x$.

On retrouve la situation correspondant au cas $n = 0$
et il en est de même pour $n = 8, 12, 16, \dots, 4k$, $k \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 5$:

$$F = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left[2\pi + \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

On retrouve la situation correspondant au cas $n = 1$
et il en est de même pour $n = 9, 13, 17, \dots, 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 6$:

$$F = \sin(x + 3\pi) = \sin[2\pi + (x + \pi)] = \sin(x + \pi) = -\sin x.$$

On retrouve la situation correspondant au cas $n = 2$
et il en est de même pour $n = 10, 14, 18, \dots, 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 7$:

$$F = \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left[2\pi + \left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

On retrouve la situation correspondant au cas $n = 3$
et il en est de même pour $n = 11, 15, 19, \dots, 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$.

En résumé :

$$F = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin x & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4k \\ \cos x & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4k + 1 \\ -\sin x & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4k + 2 \\ -\cos x & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4k + 3. \end{cases}$$

2. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle donné :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$

c) $\tan x = -1$, $-4\pi \leq x \leq -3\pi$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$

d) $\cot x = \sqrt{3}$, $-\pi \leq x \leq 0$

a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$

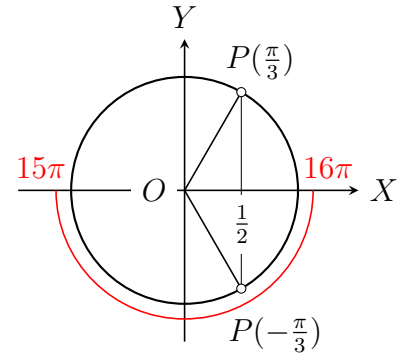
Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = \frac{\pi}{3}$. On en déduit toutes les autres :

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Résolution sur l'intervalle $[15\pi, 16\pi]$:

$$x = 16\pi - \frac{\pi}{3}, \quad S = \left\{ \frac{47\pi}{3} \right\}.$$



b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$

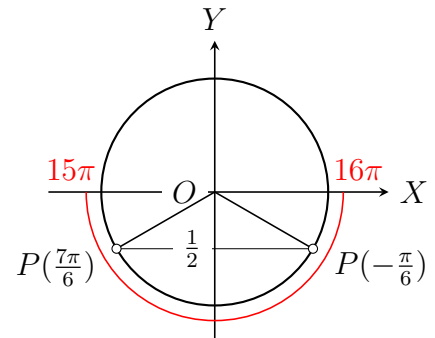
Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. On en déduit toutes les autres :

$$\sin x = \sin -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Résolution sur l'intervalle $[15\pi, 16\pi]$: $x = 15\pi + \frac{\pi}{6}$ ou $x = 16\pi - \frac{\pi}{6}$,

$$S = \left\{ \frac{91\pi}{6}, \frac{95\pi}{6} \right\}.$$



c) $\tan x = -1$, $-4\pi \leq x \leq -3\pi$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

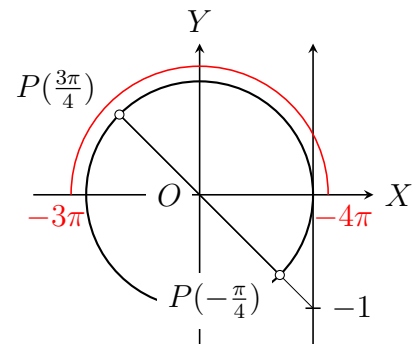
Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. On en déduit toutes les autres :

$$\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Résolution sur l'intervalle $[-4\pi, -3\pi]$:

L'unique solution, représentée par le point $P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ est donnée par

$$x = -4\pi + \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = -3\pi - \frac{\pi}{4}, \quad S = \left\{ -\frac{13\pi}{4} \right\}.$$



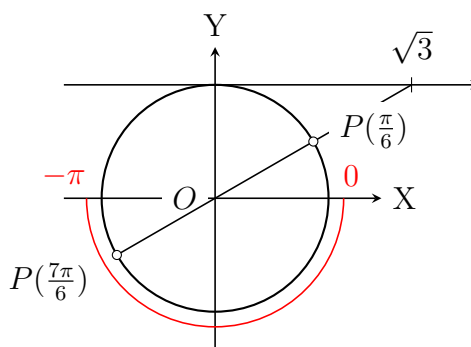
d) $\cot x = \sqrt{3}, \quad -\pi \leq x \leq 0$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

On en déduit toutes les autres :

$$\cot x = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



L'unique solution, représentée par le point $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ est donnée par

$$x = -\pi + \frac{\pi}{6}, \quad S = \left\{-\frac{5\pi}{6}\right\}.$$

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $(\cos t)(2 \cos t + 3) = -1$ b) $4 - 5 \sin t = 2 \cos^2 t, \quad -\frac{11\pi}{2} \leq t \leq -5\pi$

a) $(\cos t)(2 \cos t + 3) = -1, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$

C'est une équation du deuxième degré en $\cos t$:

$$(\cos t)(2 \cos t + 3) = -1 \Leftrightarrow 2 \cos^2 t + 3 \cos t + 1 = 0.$$

On la résout à l'aide de son discriminant Δ :

$$\Delta = 3^2 - 8 = 1, \quad \cos t = \frac{-3-1}{4} = -1 \quad \text{ou} \quad \cos t = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2},$$

ou en devinant une factorisation :

$$2 \cos^2 t + 3 \cos t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2 \cos t + 1)(\cos t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t = -1 \quad \text{ou} \quad \cos t = -\frac{1}{2}.$$

On résout chaque équation élémentaire :

- $\cos t = -1 \Leftrightarrow \cos t = \cos \pi \Leftrightarrow t = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

- $\cos t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos t = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow t = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

L'ensemble solution est la réunion de toutes les solutions :

$$S = \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) $4 - 5 \sin t = 2 \cos^2 t, \quad -\frac{11\pi}{2} \leq t \leq -5\pi$

$$4 - 5 \sin t = 2(1 - \sin^2 t)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 t - 5 \sin t + 2 = 0$$

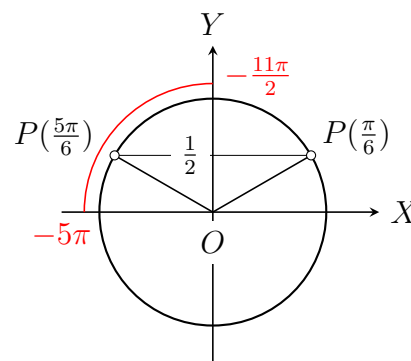
$$\Leftrightarrow (2 \sin t - 1)(\sin t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2} \quad \text{car} \quad \sin t \neq 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\sin t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sur l'intervalle $[-\frac{11\pi}{2}, -5\pi]$, $t = -5\pi - \frac{\pi}{6}$, $S = \left\{ -\frac{31\pi}{6} \right\}$.



4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné.

a) $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x \in [0, \pi],$

b) $4 \sin^4(2x) - 11 \sin^2(2x) + 6 = 0, \quad x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}],$

c) $\tan(2x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x \in [0, \pi],$

d) $\cot^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}, \quad x \in]0, 2\pi[.$

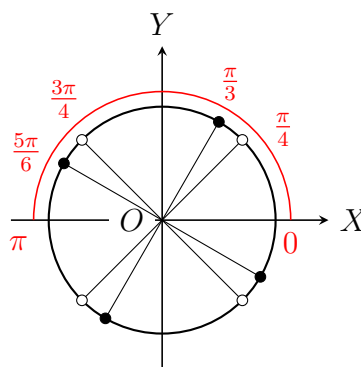
a) Résolution de l'équation $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

• Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(4x + \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x + \frac{\pi}{3} = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



- Résolution sur l'intervalle $[0, \pi]$

Il y a quatre solutions sur l'intervalle $[0, \pi]$,

- celles définies par $-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 1, 2$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$
- et celles définies par $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1$: $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

- b) Résolution de l'équation $4 \sin^4(2x) - 11 \sin^2(2x) + 6 = 0$.

Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

On résout cette équation bicarrée à l'aide de son discriminant Δ :

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6 = 25, \quad \sin^2(2x) = \frac{11 - 5}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad \sin^2(2x) = \frac{11 + 5}{8} = 2,$$

Seule la solution $\sin^2(2x) = \frac{3}{4}$ est acceptable :

$$\sin^2(2x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\circ \sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

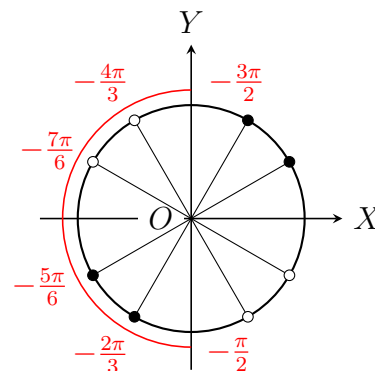
$$\circ \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Résolution sur l'intervalle $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$

- Deux solutions correspondent à $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
il s'agit de $x = -\frac{4\pi}{3}$ et $x = -\frac{7\pi}{6}$.
- Deux solutions correspondent à $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
il s'agit de $x = -\frac{5\pi}{6}$ et $x = -\frac{2\pi}{3}$.

$$S = \left\{ -\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3} \right\}.$$



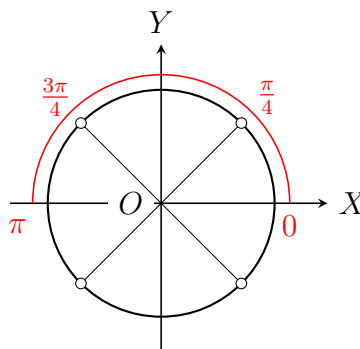
c) Résolution de l'équation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x + \frac{\pi}{3} \in D_{\tan} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



- Résolution sur l'intervalle $[0, \pi]$

Il y a deux solutions sur l'intervalle $[0, \pi]$, celles qui correspondent à $k = 1$ et $k = 2$.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

d) Résolution de l'équation $\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$ sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

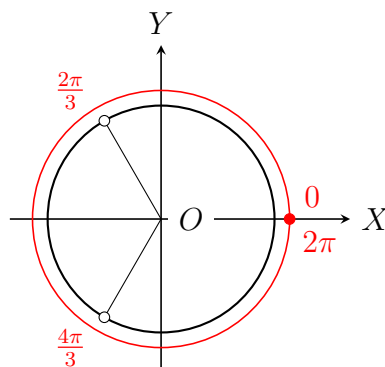
$$D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{2} \in D_{\cot} \right\} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

• Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \circ \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} &\Leftrightarrow \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ \cot\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} &\Leftrightarrow \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



• Résolution sur l'intervalle $]0, 2\pi[$

Il y a deux solutions sur l'intervalle $]0, 2\pi[$,

- l'une correspond à $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k = 0$
- et l'autre correspond à $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k = 1$.

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

5. Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(2x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

c) $\cos(2x) = \sin(3x)$

b) $\cos(2x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

d) $\tan\left(\frac{x}{3}\right) = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\text{a) } \sin(2x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \cos(2x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{x}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{x}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{3} = 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{7x}{3} = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = \frac{6k\pi}{7} \end{cases} \quad S = \left\{ \frac{6k\pi}{5}, \frac{6k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \cos(2x) = \sin(3x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - 3x\right]$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\left[\frac{\pi}{2} - 3x\right] + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ -x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad S = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \tan\left(\frac{x}{3}\right) = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \quad D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{3} \in D_{\tan} \text{ et } x - \frac{\pi}{6} \in D_{\cot} \right\},$$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\tan\left(\frac{x}{3}\right) = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{3}\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + k\pi \Leftrightarrow \frac{4x}{3} = \frac{2\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On vérifie que ces valeurs sont bien dans le domaine de définition :

- $\frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} \neq \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad \forall k, n \in \mathbb{Z}$
- et $\frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{2} + 3n\pi, \quad \forall k, n \in \mathbb{Z}$, car
 $\frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 3n\pi \Leftrightarrow \frac{3k}{4} = 3n + 1 \Leftrightarrow 3(k - 4n) = 4,$
ce qui n'est pas possible si k et n sont entiers.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6. Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle donné :

$$\text{a) } \sin x \geq \frac{1}{2}, \quad 4\pi \leq x < 5\pi,$$

$$\text{b) } -\frac{1}{2} < \cos x < 0, \quad -5\pi \leq x < -3\pi,$$

$$\text{c) } \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) > \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right), \quad -2\pi \leq x < 0,$$

$$\text{d) } \tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad 0 \leq x < 2\pi,$$

$$\text{e) } \cot x > \sqrt{3}, \quad -2\pi \leq x < \pi,$$

$$\text{f) } \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x \in [-\pi, 0].$$

a) Résolution de l'inéquation $\sin x \geq \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[4\pi, 5\pi[$

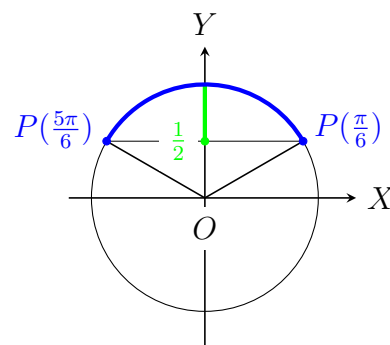
- Représentation des points $P(x)$ tels que

$$\sin x \geq \frac{1}{2}.$$

On représente, sur l'axe des sinus, les valeurs plus grandes que $\frac{1}{2}$.

Puis on en déduit les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est plus grande que $\frac{1}{2}$.

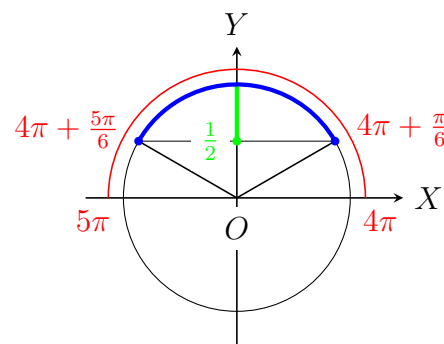
$$\sin x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[4\pi, 5\pi[$:

$$4\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 4\pi + \frac{5\pi}{6},$$

$$S = \left[\frac{25\pi}{6}, \frac{29\pi}{6} \right].$$



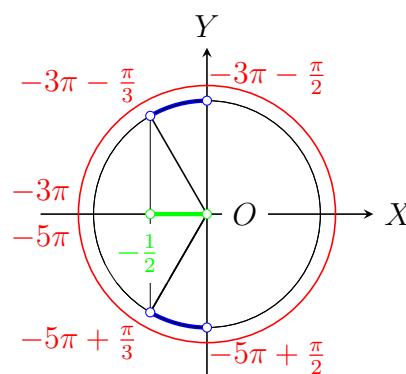
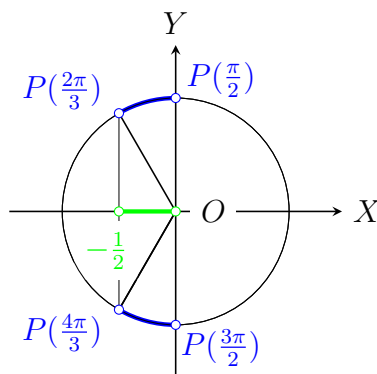
b) Résolution de l'inéquation $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$ sur l'intervalle $[-5\pi, -3\pi[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$.

On représente, sur l'axe des cosinus, les valeurs comprises entre $-\frac{1}{2}$ et 0.

Puis on en déduit les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et 0.

$$-\frac{1}{2} < \cos x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à $[-5\pi, -3\pi[$:

$$-5\pi + \frac{\pi}{3} < x < -5\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad -3\pi - \frac{\pi}{2} < x < -3\pi - \frac{\pi}{3},$$

$$S = \left] -\frac{14\pi}{3}, -\frac{9\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{7\pi}{2}, -\frac{10\pi}{3} \right[.$$

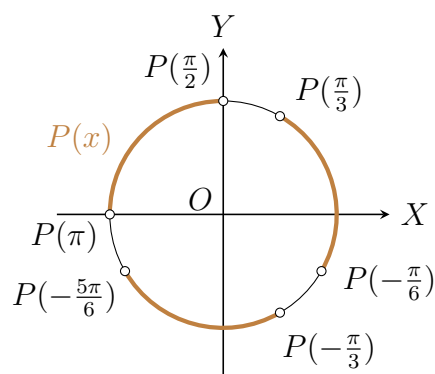
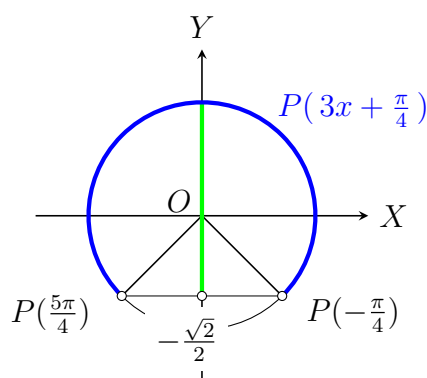
c) Résolution de l'inéquation $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) > \sin(-\frac{3\pi}{4})$ sur l'intervalle $[-2\pi, 0[$

- Représentation des points $P(3x + \frac{\pi}{4})$ tels que $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) > \sin(-\frac{3\pi}{4})$.

Sur l'axe des sinus, on représente les valeurs supérieures à $\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Puis on représente les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est plus grande que $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\sin(3x + \frac{\pi}{4}) > \sin(-\frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < 3x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

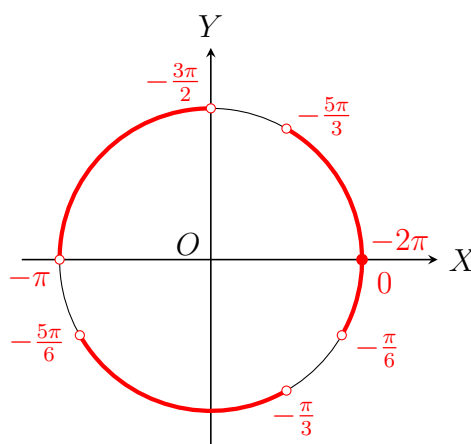


- On en déduit les points $P(x)$ vérifiant $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) > \sin(-\frac{3\pi}{4})$:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < 3x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 3x < \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à $[-2\pi, 0[$:

$$S = [-2\pi, -\frac{5\pi}{3}[\cup]-\frac{3\pi}{2}, -\pi[\cup]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}[\cup]-\frac{\pi}{6}, 0[.$$



d) Résolution de l'inéquation $\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$

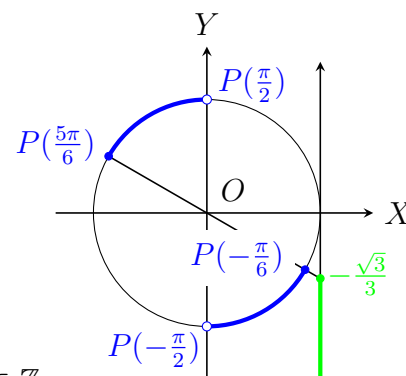
- Représentation des points $P(x)$ tels que

$$\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus petites que $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

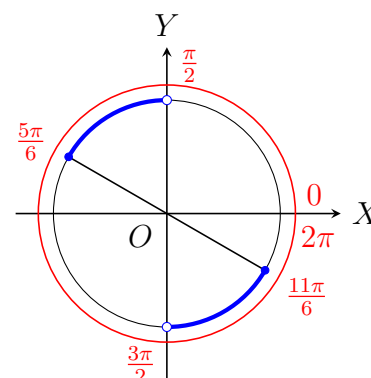
$$\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi[$:

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{11\pi}{6}$$

$$S =]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}] \cup]\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}].$$



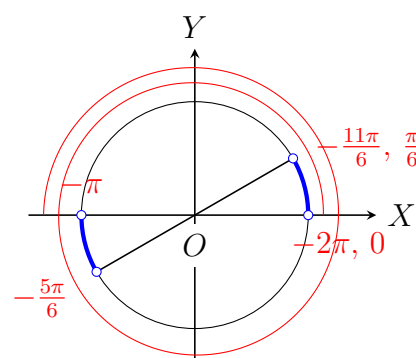
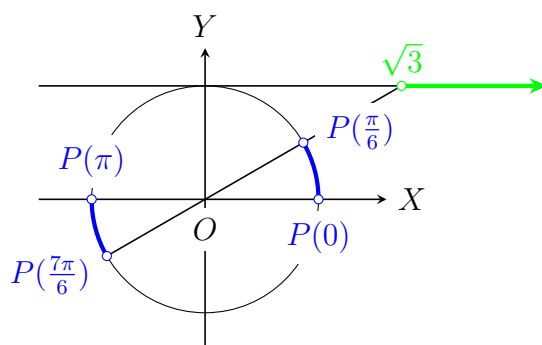
e) Résolution de l'inéquation $\cot x > \sqrt{3}$ sur l'intervalle $[-2\pi, \pi[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que $\cot x > \sqrt{3}$.

On représente, sur l'axe des cotangentes, les valeurs plus grandes que $\sqrt{3}$.

Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

$$\cot x > \sqrt{3} \Leftrightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-2\pi, \pi[$:

$$-2\pi < x < -2\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad -\pi < x < -\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad 0 < x < \frac{\pi}{6},$$

$$S =]-2\pi, -\frac{11\pi}{6}[\cup]-\pi, -\frac{5\pi}{6}[\cup]0, \frac{\pi}{6}[.$$

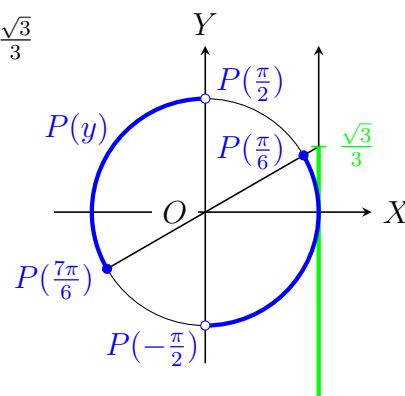
f) Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

- Représentation des points $P(y)$ tels que $\tan y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus petites que $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

$$\tan y \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < y \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

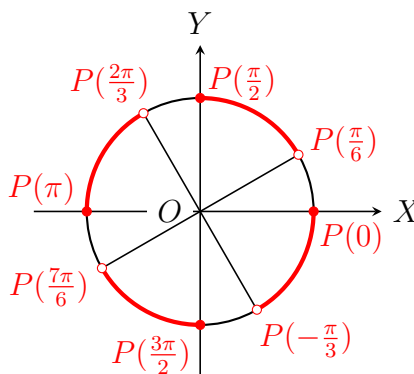


- Solutions de l'inéquation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

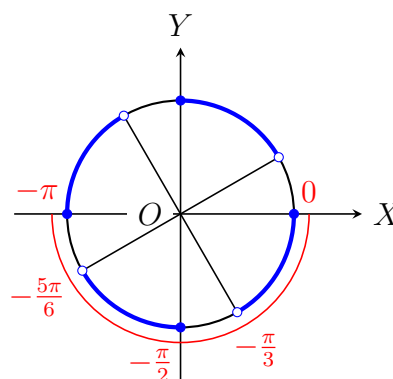
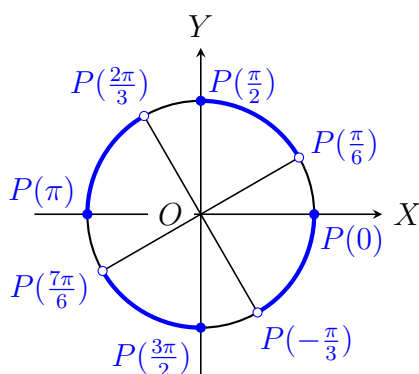
$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + k\pi < 2x \leq k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} < x \leq \frac{k\pi}{2}.$$

On en déduit la représentation, sur le cercle trigonométrique, des points $P(x)$ représentant les solutions de l'inéquation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$:



Recherche des solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, 0]$



$$S = \{-\pi\} \cup \left]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right].$$

7. Soit A l'expression définie par $A = \frac{\cos(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan(\frac{3\pi}{2} + x)}{\sin(x + \frac{5\pi}{2}) - \cos(\pi - x)}$.

- a) Déterminer le domaine de définition de A .
- b) Simplifier cette expression.

a) $D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \tan(\frac{3\pi}{2} + x) \text{ soit défini et } \sin(x + \frac{5\pi}{2}) - \cos(\pi - x) \neq 0\}$

- $\tan(\frac{3\pi}{2} + x)$ est défini si et seulement si $\frac{3\pi}{2} + x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow x \neq \ell\pi, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$
- Résolvons l'équation $\sin(x + \frac{5\pi}{2}) = \cos(\pi - x).$
 - $\sin(x + \frac{5\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin[\pi - (x + \frac{\pi}{2})] = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
 - $\cos(\pi - x) = -\cos x$

L'équation devient :

$$\cos x = -\cos x \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'où $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}.$

b) • Simplification du numérateur

- $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos[-(x - \frac{\pi}{2})] = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x.$
- $\tan(\frac{3\pi}{2} + x) = \cot[\frac{\pi}{2} - (\frac{3\pi}{2} + x)] = \cot(-\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x.$

Le numérateur s'écrit donc

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan(\frac{3\pi}{2} + x) = -\sin x \cdot \cot x = -\cos x.$$

• La simplification du dénominateur a déjà été faite sous a) :

$$\sin(x + \frac{5\pi}{2}) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

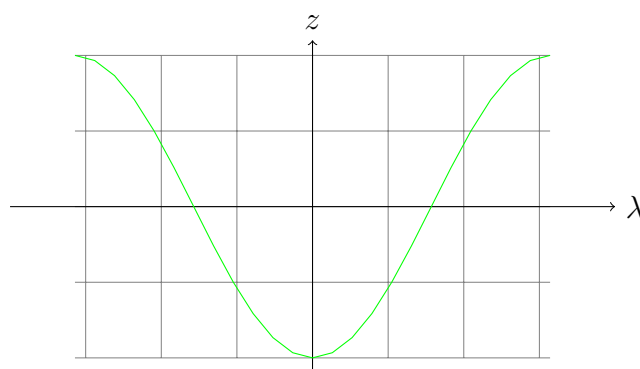
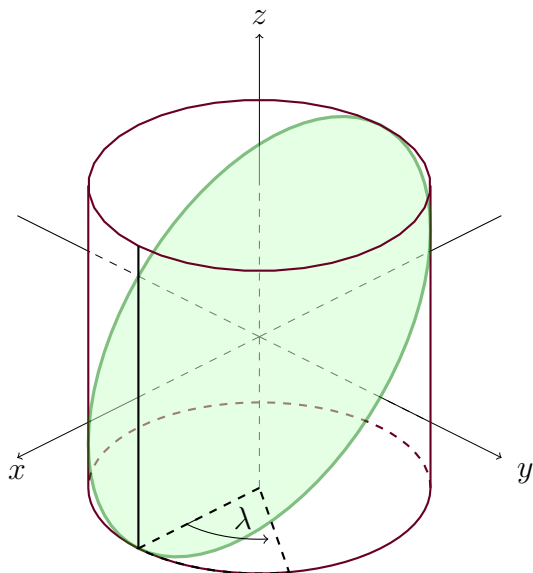
Le dénominateur s'écrit donc $\sin(x + \frac{5\pi}{2}) - \cos(\pi - x) = 2 \cos x.$

Sur son domaine de définition :

$$A = \frac{\cos(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan(\frac{3\pi}{2} + x)}{\sin(x + \frac{5\pi}{2}) - \cos(\pi - x)} = \frac{-\cos x}{2 \cos x} = -\frac{1}{2}.$$

8. Exercice récréatif

On considère un cylindre centré en $(0,0,0)$, de rayon R . Celui-ci est intersecté par un plan contenant l'axe (Oy) . L'angle formé par le plan et l'horizontale est de α . On découpe le cylindre le long d'une arête verticale et on le déplie. Décrire la courbe que forme l'intersection entre le cylindre et le plan.



Soit un point P sur l'intersection du cylindre avec le plan incliné. Celui-ci aura comme coordonnées $P(R \cos(\lambda), R \sin(\lambda), z_P)$. La projection Q de ce point sur le plan (yOz) aura comme coordonnées $Q(0, R \sin(\lambda), z_P)$. Soit encore le point $A(0, R \sin(\lambda), 0)$. On a $\widehat{QPA} = \alpha$. On en conclut que

$$\frac{z_A - z_P}{R \cos(\lambda)} = \tan(\alpha) \Leftrightarrow z_P(\lambda) = -\tan(\alpha) R \cos(\lambda).$$

