

Corrigé 2

1. A l'aide du cercle trigonométrique, mais sans machine à calculer, déterminer les valeurs suivantes :

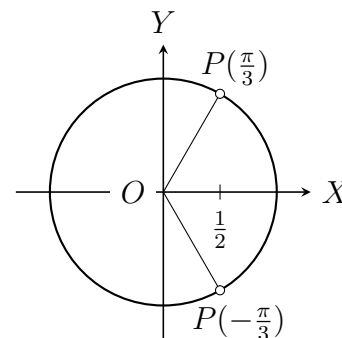
a) $\cos(\frac{179\pi}{3})$ b) $\sin(-\frac{374\pi}{6})$ c) $\tan(\frac{163\pi}{4})$ d) $\cot(-\frac{67\pi}{3})$

a) $\cos(\frac{179\pi}{3}) = \cos(60\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3})$.

Or les points $P(-\frac{\pi}{3})$ et $P(\frac{\pi}{3})$
sont symétriques par rapport à l'axe Ox .

Donc $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3})$.

Et $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, d'où $\cos(\frac{179\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

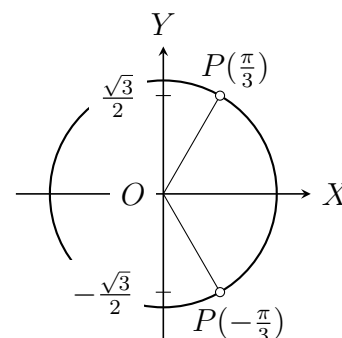


b) $\sin(-\frac{374\pi}{6}) = \sin(-62\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3})$.

Or les points $P(-\frac{\pi}{3})$ et $P(\frac{\pi}{3})$
sont symétriques par rapport à l'axe Ox .

Donc $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3})$.

Et $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $\sin(-\frac{374\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

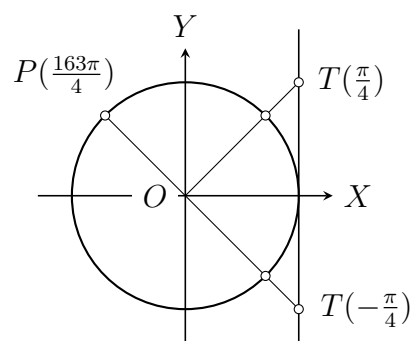


c) $\tan(\frac{163\pi}{4}) = \tan(41\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(-\frac{\pi}{4})$.

Or les points $T(-\frac{\pi}{4})$ et $T(\frac{\pi}{4})$
sont symétriques par rapport à l'axe Ox .

Donc $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4})$.

Et $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, d'où $\tan(\frac{163\pi}{4}) = -1$.

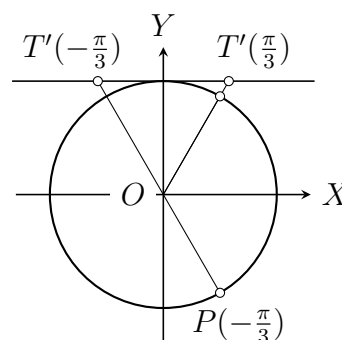


d) $\cot(-\frac{67\pi}{3}) = \cot(-22\pi - \frac{\pi}{3}) = \cot(-\frac{\pi}{3})$.

Or les points $T'(-\frac{\pi}{3})$ et $T'(\frac{\pi}{3})$
sont symétriques par rapport à l'axe Oy .

Donc $\cot(-\frac{\pi}{3}) = -\cot(\frac{\pi}{3})$.

Et $\cot(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, d'où $\cot(-\frac{67\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.



2. Calculer, sans machine, la valeur des fonctions trigonométriques des angles ainsi définis :

- a) $\cos x = \pm \frac{4}{5}$, $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi$ c) $\tan x = \pm \frac{4}{3}$, $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$
 b) $\sin x = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$, $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$ d) $\cot x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$, $11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2}$
-

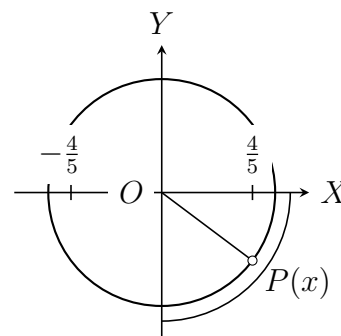
a) x est défini par $\cos x = \pm \frac{4}{5}$, $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi$.

- Signe des fonctions trigonométriques de x .

Localisation de $P(x)$:

$$\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi \Rightarrow P(x) \in IV.$$

Donc $\cos x > 0$, $\sin x < 0$ et $\tan x < 0$.



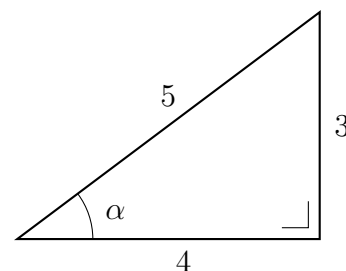
- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de x .

Soit α l'angle géométrique aigu défini

par $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ et } \tan \alpha = \frac{3}{4}.$$



En conclusion : $\cos x = \frac{4}{5}$, $\sin x = -\frac{3}{5}$ et $\tan x = -\frac{3}{4}$.

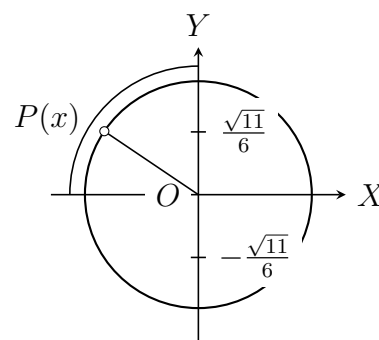
b) x est défini par $\sin x = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$, $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$.

- Signe des fonctions trigonométriques de x .

Localisation de $P(x)$:

$$-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi \Rightarrow P(x) \in II.$$

Donc $\sin x > 0$, $\cos x < 0$ et $\tan x < 0$.



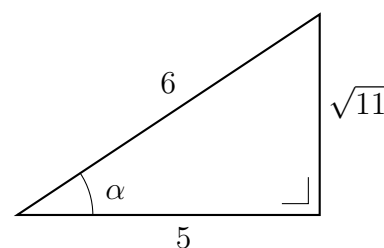
- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de x .

Soit α l'angle géométrique aigu défini

par $\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit $\cos \alpha$ et $\tan \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{5}{6} \text{ et } \tan \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}.$$



En conclusion : $\sin x = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\cos x = -\frac{5}{6}$ et $\tan x = -\frac{\sqrt{11}}{5}$.

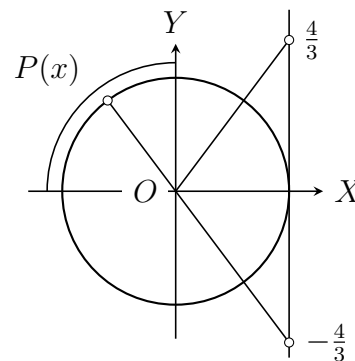
c) x est défini par $\tan x = \pm \frac{4}{3}$, $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$

- Signe des fonctions trigonométriques de x .

Localisation de $P(x)$:

$$-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi \Rightarrow P(x) \in II.$$

Donc $\tan x < 0$, $\sin x > 0$ et $\cos x < 0$.



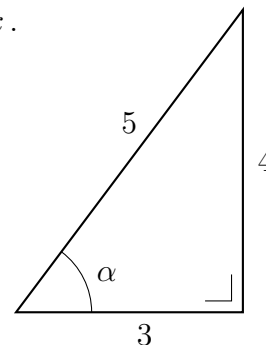
- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de x .

Soit α l'angle géométrique aigu défini

par $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.

A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ et } \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$



En conclusion : $\tan x = -\frac{4}{3}$, $\sin x = \frac{4}{5}$ et $\cos x = -\frac{3}{5}$.

d) $\cot x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$, $11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2}$.

$$11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2} \Rightarrow P(x) \in III.$$

Or $P(x) \in III$ et $\cot x < 0$ sont incompatibles.

3. a) Calculer $A = \sin x - \frac{1}{\cos x}$ sachant que $\tan x = -\frac{1}{2}$ et $4\pi \leq x \leq 5\pi$.

b) Soit φ l'angle défini par $\sin \varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $65\pi < 2\varphi < 67\pi$.

$$\text{Calculer } B = \frac{3 \sin \varphi - 2 \cos \varphi - 5 \tan \varphi}{1 + \sin \varphi \cdot \cos \varphi - 3 \tan^2 \varphi}.$$

a) • Localisation de $P(x)$:

$$4\pi \leq x \leq 5\pi \Rightarrow P(x) \in I \cup II. \text{ Or } \tan x < 0 \text{ donc } P(x) \in II.$$

On en déduit donc que $\sin x > 0$ et $\cos x < 0$.

- Calcul de $\sin x$ et $\cos x$:

Soit α l'angle géométrique aigu défini par $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, alors $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\text{D'où : } \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{et} \quad A = \frac{7\sqrt{5}}{10}.$$

b) • Localisation de $P(\varphi)$:

$$65\pi < 2\varphi < 67\pi \Leftrightarrow \frac{65\pi}{2} < \varphi < \frac{67\pi}{2} \Rightarrow P(\varphi) \in II \cup III.$$

Or $\sin \varphi < 0$ donc $P(\varphi) \in III$.

On en déduit donc que $\cos \varphi < 0$ et $\tan \varphi > 0$.

• Calcul de $\cos \varphi$ et $\tan \varphi$:

Soit α l'angle géométrique aigu défini par $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$,

alors $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\tan \alpha = \frac{2}{3}$.

D'où : $\cos \varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\tan \varphi = +\frac{2}{3}$ et $B = -26$.

4. Comparer, sans machine, les angles α et β dans les trois cas suivants :

a) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ et $\beta = \frac{5\pi}{6}$.

b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$, $\alpha \in [0, \pi]$ et $\beta = \frac{\pi}{3}$.

c) $\tan \alpha = -2$, $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\beta = -\frac{\pi}{3}$.

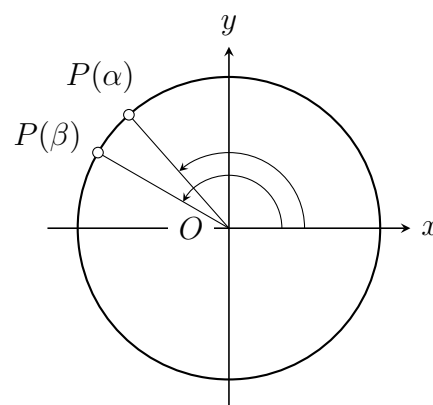
a) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ et $\beta = \frac{5\pi}{6}$.

β est un angle remarquable, on connaît son sinus : $\sin \beta = \frac{1}{2}$.

D'où : $\sin \alpha > \sin \beta$.

Or la fonction sinus, sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, est décroissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, le sinus diminue).

Donc $\alpha < \beta$.



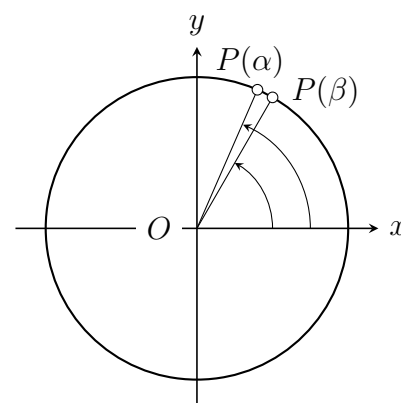
b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$, $\alpha \in [0, \pi]$ et $\beta = \frac{\pi}{3}$.

β est un angle remarquable, on connaît son cosinus : $\cos \beta = \frac{1}{2}$.

D'où : $\cos \alpha < \cos \beta$.

Or la fonction cosinus, sur l'intervalle $[0, \pi]$, est décroissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, le cosinus diminue).

Donc $\alpha > \beta$.



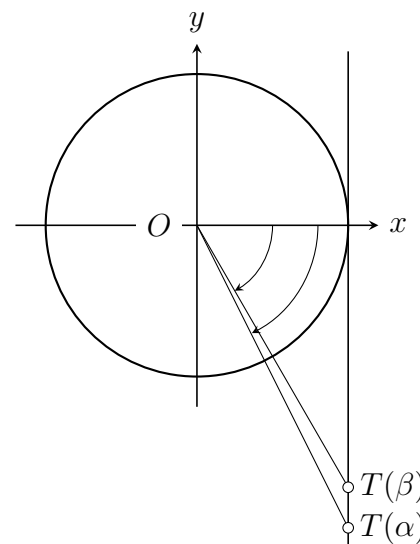
c) $\tan \alpha = -2$, $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\beta = -\frac{\pi}{3}$.

β est un angle remarquable, on connaît sa tangente : $\tan \beta = -\sqrt{3}$.

D'où : $\tan \alpha < \tan \beta$.

Or la fonction tangente, sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, est croissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, la tangente augmente).

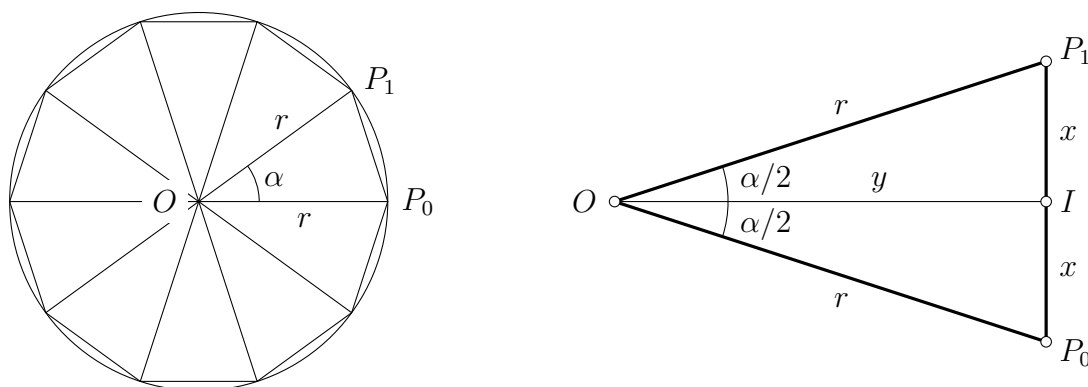
Donc $\alpha < \beta$.



5. Un polygone régulier de n côtés est inscrit dans un cercle de rayon r .

Calculer le périmètre P et l'aire A de ce polygone en fonction de r et de n .

Figure d'étude



Le polygone étant régulier, on peut le décomposer en n triangles isométriques.

On en déduit la valeur de l'angle α : $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Ces triangles sont isocèles, la hauteur OI est donc aussi une bissectrice et une médiane.

On en déduit l'expression de $x = P_0I$ et de $y = OI$:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

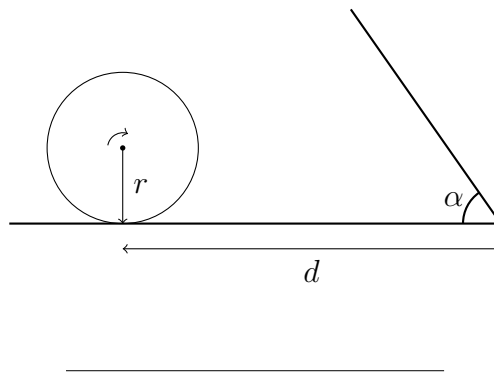
- Soit P le périmètre du polygone : $P = n \cdot P_0P_1 = 2nx = 2nr \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$P = 2nr \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

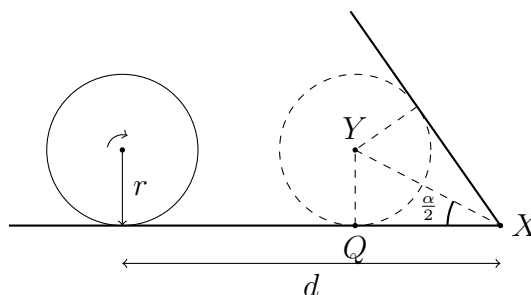
- Soit A l'aire du polygone : $A = n x \cdot y = n r^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$A = n r^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

6. Une roue part d'une position initiale, jusqu'à toucher un mur incliné. En fonction des données (r, d, α) , calculer l'angle β dont la roue aura tourné au moment où elle entre en contact avec le mur incliné.



Observons la position de la roue au moment du contact:



On remarque qu'au moment du contact, la distance parcourue par le centre de la roue sera de $d - |QX|$, et qu'elle aura donc tourné d'un angle de

$$\beta = \frac{d - |QX|}{r}.$$

En considérant le triangle YXQ , on voit que

$$\tan(\alpha/2) = \frac{|YQ|}{|QX|} = \frac{r}{|QX|},$$

et donc $|QX| = \frac{r}{\tan(\alpha/2)}.$

On a donc

$$\beta = \frac{d - \frac{r}{\tan(\alpha/2)}}{r}.$$

7. Pour déterminer la hauteur d'une tour, on vise son sommet depuis un point au sol, avec un angle d'élévation α ; puis on s'avance d'une distance d vers le pied de la tour et on effectue une deuxième visée avec un angle β .

Calculer la hauteur h de la tour en fonction de α , β et d .

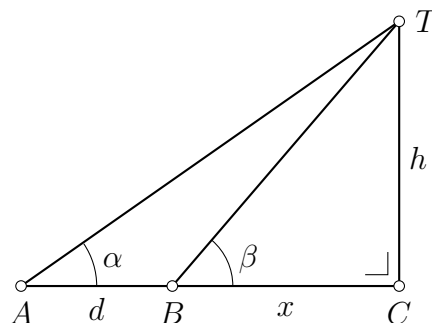
Soit x la distance entre le deuxième point de visée et le pied de la tour.

Dans le triangle rectangle ACT :

$$h = (d + x) \tan \alpha.$$

Dans le triangle rectangle BCT :

$$h = x \tan \beta.$$

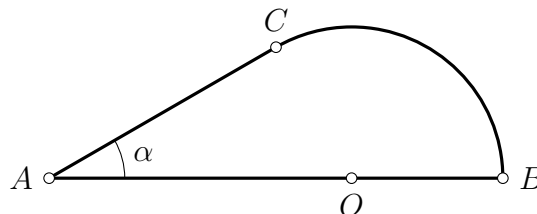


On en déduit la distance x puis la hauteur h :

$$(d+x) \tan \alpha = x \tan \beta \Leftrightarrow x = d \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}, \quad \text{d'où} \quad h = d \cdot \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}.$$

8. La figure ci-jointe est constituée d'un segment AB , d'un arc de cercle (BC) de centre O et du segment AC tangent à l'arc (BC) en C .

On connaît les mesures suivantes :
 $AB = 18 \text{ cm}$ et $\alpha = 30^\circ$.



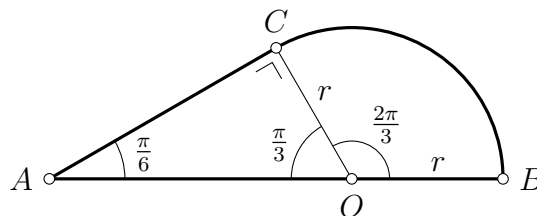
Calculer le périmètre P et l'aire A de cette figure.

- Calcul du rayon r :

Pour calculer le rayon r , on l'exprime en fonction des données α et AB .

$$AB = AO + r, \text{ avec } AO = \frac{r}{\sin \alpha},$$

$$AB = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + 1 \right) \Leftrightarrow r = \frac{AB}{\frac{1}{\sin \alpha} + 1} \Leftrightarrow r = 6 \text{ cm.}$$



- Calcul de AC :

$$\tan \alpha = \frac{r}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{r}{\tan \alpha} \Leftrightarrow AC = 6\sqrt{3} \approx 10,4 \text{ cm.}$$

- Calcul du périmètre P :

L'arc BC est de mesure $\beta = \frac{2\pi}{3}$ radians.

Sa longueur vaut donc $\beta \cdot r = 4\pi$ cm.

$$P = 3r + \beta r + r\sqrt{3} = r\left(3 + \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \approx 41 \text{ cm.}$$

- Calcul de l'aire A :

$$\text{Aire du triangle } AOC : \frac{1}{2} r \cdot AC = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\text{Aire du secteur circulaire } OBC : \frac{1}{2} \beta \cdot r^2 = 12\pi \text{ cm}^2.$$

$$\text{D'où l'aire } A \text{ du domaine : } A = 18\sqrt{3} + 12\pi \approx 68,9 \text{ cm}^2.$$
