Corrigé 11

1. Exprimer les nombres suivants à l'aide de la fonction logarithme :

a) $A = -1$, b) $B = \frac{1}{2}$, c) $C = 3$.

---

a) $A = -1 = -\ln e = \ln(e^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

b) $B = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ \ln e = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \ln(\sqrt{e}\,)$.

c) $C = 3 = 3\ \ln e = \ln(e^3)$.

2. Exprimer les quantités suivantes de la façon la plus simple possible, à l'aide d'une seule fonction logarithme :

a) $A = \ln 15 - \ln 6 + 3\ \ln 2$, b) $B = \ln(3 \cdot \sqrt{e}\,) + \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) - \frac{1}{2}\ \ln 8$.

---

a) $A = \ln 15 - \ln 6 + 3\ \ln 2 = \ln 15 + \ln(6^{-1}) + \ln(2^3) = \ln\left(15 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2^3\right) = \ln(20)$.

b) $B = \ln(3 \cdot \sqrt{e}\,) + \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) - \frac{1}{2}\ \ln 8 = \ln(3) + \frac{1}{2}\ \ln(e) + \ln\left(2\sqrt{2}\right) - \ln(9) - \ln(\sqrt{8})$

$= \ln(3) + \frac{1}{2} + \ln\left(\sqrt{8}\right) - 2\ \ln(3) - \ln(\sqrt{8}) = \frac{1}{2} - \ln(3)$.

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $3\ \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$ b) $\ln(\sin x) = 1 + \ln(\cos x)$

c) $\ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) + \ln\sqrt{2} = \ln(2x - 30) - \ln\sqrt{2}$

---

a) $3\ \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$.

$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} - x > 0 \ \text{ et } \ \frac{x-9}{x+1} > 0\right\} = \,]-\infty\,, -1\,[$.

$\ln(2^3) + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left[8\left(\frac{1}{2} - x\right)\right] = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$

$\Leftrightarrow \quad 8\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{x-9}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad 8x^2 + 5x - 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (8x+13)(x-1) = 0$.

$x = 1 \notin D_{\text{def}}$, la seule solution est $x = -\frac{13}{8}$.

b) $\ln(\sin x) = 1 + \ln(\cos x)$.

$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x > 0 \text{ et } \cos x > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \,]\, 2k\pi\,,\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,[$.

$\ln(\sin x) - \ln(\cos x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\frac{\sin x}{\cos x}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\tan x) = \ln e$

$\Leftrightarrow \quad \tan x = e \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan e + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Les seules solutions acceptables sont celles qui appartiennent au premier quadrant : $x = \arctan e + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$.

c) $\ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) + \ln\sqrt{2} = \ln(2x - 30) - \ln\sqrt{2}$.

$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 13 - \frac{15}{x} > 0 \text{ et } 2\,(x - 15) > 0\right\} = \,]\,15\,,\, +\infty\,[$.

$\ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) + 2\,\ln\sqrt{2} = \ln\,[\,2\,(x-15)\,]$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) + \ln 2 = \ln 2 + \ln(x - 15)$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) = \ln(x - 15)$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 13 - \frac{15}{x} = x - 15 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+5)\,(x-3) = 0$.

Or $\quad x = -5 \notin D_{\text{def}} \quad$ et $\quad x = 3 \notin D_{\text{def}}\,, \quad$ d'où $\quad S = \emptyset$.

4. Résoudre les trois inéquations suivantes :

a) $\ln\sqrt{3-x} + \ln\sqrt{x+1} \le \ln\sqrt{10-6x}$

b) $\ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\ln\frac{x-4}{x-6} \le -\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(2x) - 2\,\ln|x-6|$

---

a) $\ln\sqrt{3-x} + \ln\sqrt{x+1} \le \ln\sqrt{10-6x}$.

$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 - x > 0\,,\;\; x + 1 > 0 \text{ et } 10 - 6x > 0\} = \,]-1\,,\, \frac{5}{3}\,[$.

Sur D_{def}, $\quad \ln\sqrt{3-x} = \frac{1}{2}\,\ln(3-x)\,, \quad \ln\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\,\ln(x+1)$

et $\ln\sqrt{10-6x} = \frac{1}{2}\,\ln(10-6x)$. L'inéquation s'écrit alors

$\ln(3-x) + \ln(x+1) \le \ln(10-6x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln[\,(3-x)\,(x+1)\,] \le \ln(10-6x)$

or la fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\ln[\,(3-x)\,(x+1)\,] \le \ln(10-6x) \quad \Leftrightarrow \quad (3-x)\,(x+1) \le 10 - 6x$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 7 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\,(x-7) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \le 1 \text{ ou } x \ge 7$.

D'où $\quad S = \,]-1\,,1\,]\,.$

b) $\ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right).$

$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\,,\ \ \frac{1}{x} > 0 \ \text{ et } \ 2x - \frac{1}{x} > 0\right\} \ = \ ]\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,+\infty\,[\,.$

$\ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{2x^2-1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2 - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2-1\right) < 2$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2 - 1\right) < \ln(e^2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 1 < e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1+e^2}{2}$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{1+e^2}{2}} < x < \sqrt{\frac{1+e^2}{2}}\,.$ $\quad$ D'où $\quad S = \left]\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2\,(1+e^2)}}{2}\,\right[\,.$

c) $\ln\frac{x-4}{x-6} \leq -\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(2x) - 2\,\ln|x-6|\,.$

$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x - 6 \neq 0\,,\ \ 2x > 0 \ \text{ et } \ \frac{x-4}{x-6} > 0\right\} \ = \ ]\,0\,,\,4\,[\, \cup \,]\,6\,,\,+\infty\,[\,.$

$$\begin{aligned}
& \ln\frac{x-4}{x-6} \leq -\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(2x) - 2\,\ln|x-6| \\
\Leftrightarrow \quad & \ln\frac{x-4}{x-6} \leq \frac{1}{2}\,\ln(4) + \ln(2) + \ln(x) - \ln(x-6)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \ln\frac{x-4}{x-6} \leq 2\,\ln(2) + \ln(x) - \ln(x-6)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \ln\frac{x-4}{x-6} + \ln(x-6)^2 \leq 2\,\ln(2) + \ln(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \ln[\,(x-4)\,(x-6)\,] \leq \ln(4x) \\
\Leftrightarrow \quad & (x-4)\,(x-6) \leq 4x \quad (\text{car } \ln \text{ est strictement croissante}) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 14x + 24 \leq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-2)\,(x-12) \leq 0\,,
\end{aligned}$$

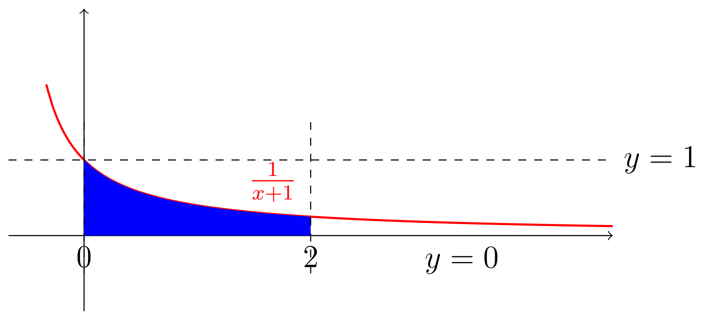
D'où $\quad S = \,[\,2\,,\,4\,[\, \cup \,]\,6\,,\,12\,]\,.$

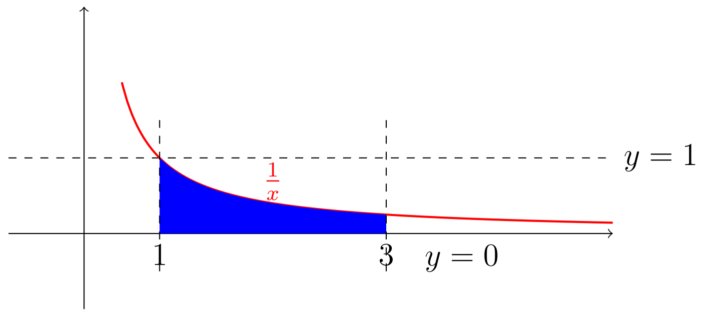
5. Déterminer la surface délimitée par les droites $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et

$$y = \frac{x}{x+1},$$

sans faire appel à la notion d'intégrale.

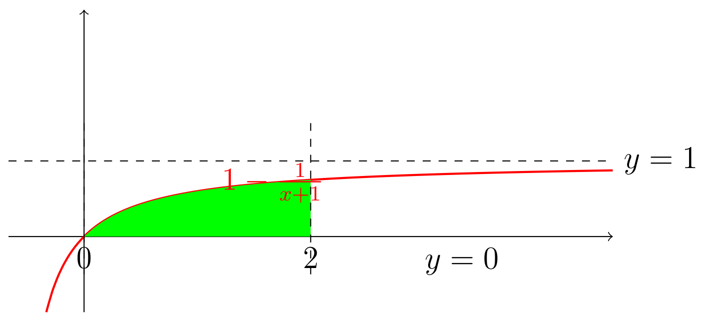
On remarque que $y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$. La fonction $\frac{1}{x+1}$ a comme graphe celui de $\frac{1}{x}$, décalé de 1 vers la gauche.



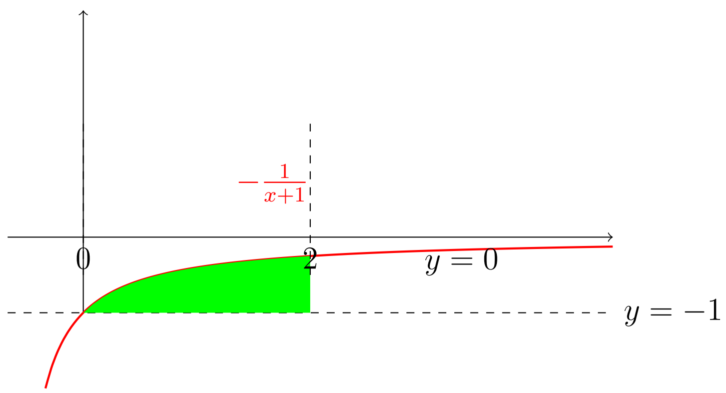


Puisque la surface est invariante par translation, calculer la surface délimitée par $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et $y = \frac{1}{x+1}$ revient à calculer la surface délimitée par $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ et $y = \frac{1}{x}$. Mais celle-ci est exactement la définition de $\ln(3)$.

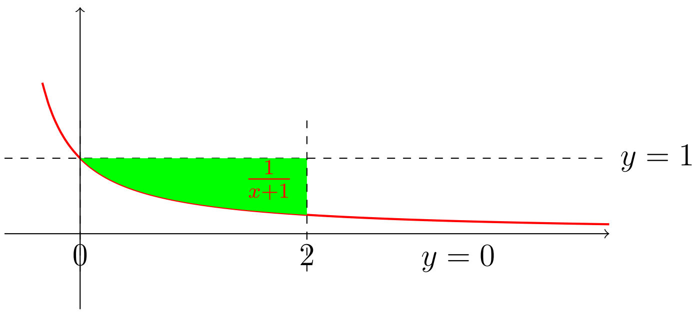
Finalement, l'aire recherchée est l'aire verte ci-dessous :



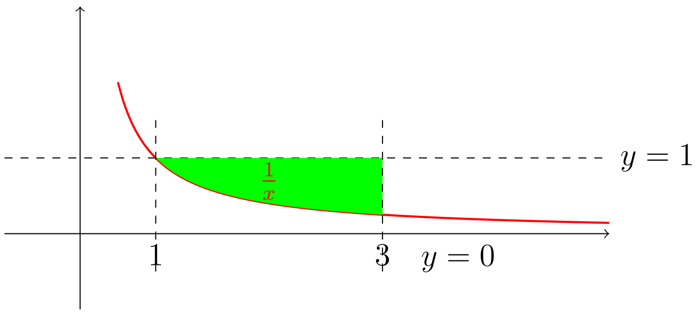
Par translation verticale, cela revient à considérer la région verte ci-dessous :



Par inversion par -1, on regarde alors :



Enfin par translation horizontale, l'aire recherchée se lit sur la figure :



On a donc que la surface S recherchée vaut la surface délimitée par $x=1$, $x=3$, $y=0$ et $y=1$, qui vaut 2, moins $\ln(3)$. On a donc

$$S = 2 - \ln(3).$$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \ln(6-x) - \ln y = \ln\left(\frac{6-x}{4x}\right) + 3\ln 2 \\ \ln(2) + \ln(4y^2+1) - \ln(2y+3) \leq \ln(x^2-2) \end{cases}$$

- Domaine de définition du système

$$D_{\text{def}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6-x>0\,,\quad y>0\,,\quad \tfrac{6-x}{4x}>0\,,\quad 2y+3>0 \ \text{ et } \ x^2-2>0\right\},$$

$$D_{\text{def}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left]\sqrt{2}\,,6\right[\ \text{ et } \ y>0\right\},$$

i) $\ln(6-x) - \ln y = \ln\left(\frac{6-x}{4x}\right) + 3\ln 2$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(6-x) - \ln y = \ln(6-x) - \ln(4x) + \ln(2^3) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(4x) = \ln y + \ln 8$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(4x) = \ln(8y) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y\,, \qquad \text{avec } \ x \in \left]\sqrt{2}\,,6\right[\ \text{ et } \ y \in \left]\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,3\right[.$$

ii) Sur D_{def}, le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x = 2y \\ \ln(2) + \ln(4y^2+1) - \ln(2y+3) \leq \ln(x^2-2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \ln(2)+\ln(4y^2+1)-\ln(2y+3)\leq \ln\left[(2y)^2-2\right] \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(2)+\ln(4y^2+1)\leq \ln(2y+3)+\ln(2)+\ln(2y^2-1) \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(4y^2+1)\leq \ln(2y+3)+\ln(2y^2-1) \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(4y^2+1)\leq \ln\left[(2y+3)\,(2y^2-1)\right] \\
\Leftrightarrow\quad & 4y^2+1\leq (2y+3)\,(2y^2-1) \quad \text{(car } \ln \text{ est strictement croissante)} \\
\Leftrightarrow\quad & 8y^3+4y^2-4y-8\geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (y-1)\,(2y^2+3y+2)\geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y-1\geq 0\,.
\end{aligned}$$

D'où $\quad S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=2y \text{ et } y\in [\,1\,,\,3\,[\,\}$.

L'ensemble solution est le segment de droite d'extrémités $A(2\,,\,1)$ et $B(6\,,\,3)$.

7. Montrer que pour tous $a,b>0\,,$ on a

$$\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\leq \ln\left(\tfrac{a+b}{2}\right).$$

"La moyenne arithmétique des logarithmes est inférieure ou égale au logarithme de la moyenne arithmétique."

On se ramène à une comparaison de logarithmes en transformant le membre de gauche :

$$\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}=\frac{1}{2}\,\ln(a\,b)=\ln\left(\sqrt{a\,b}\right),\quad a,b>0\,.$$

Pour comparer ces deux logarithmes, il suffit de comparer leur argument, la fonction $\ln$ étant strictement croissante. Pour cela on évalue leur différence :

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{a\,b}=\frac{1}{2}\left[a+b-2\sqrt{a\,b}\right]=\frac{1}{2}\left[a+b-2\sqrt{a}\,\sqrt{b}\right]=\frac{1}{2}\left[\sqrt{a}-\sqrt{b}\right]^2\geq 0\,.$$

On en déduit que $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\,b}$ et donc que $\ln\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\geq\ln\left(\sqrt{a\,b}\right)$.

8. Calculer les limites suivantes en utilisant les règles de calculs des limites :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\,[x-\ln(x)]$ b) pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\,[x^n-\ln(x)]$

Calculer les limites suivantes indéterminées en utilisant la définition géométrique du logarithme :

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\,[x-\ln(x)]$ d) pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\,[x^n-\ln(x)]$

---

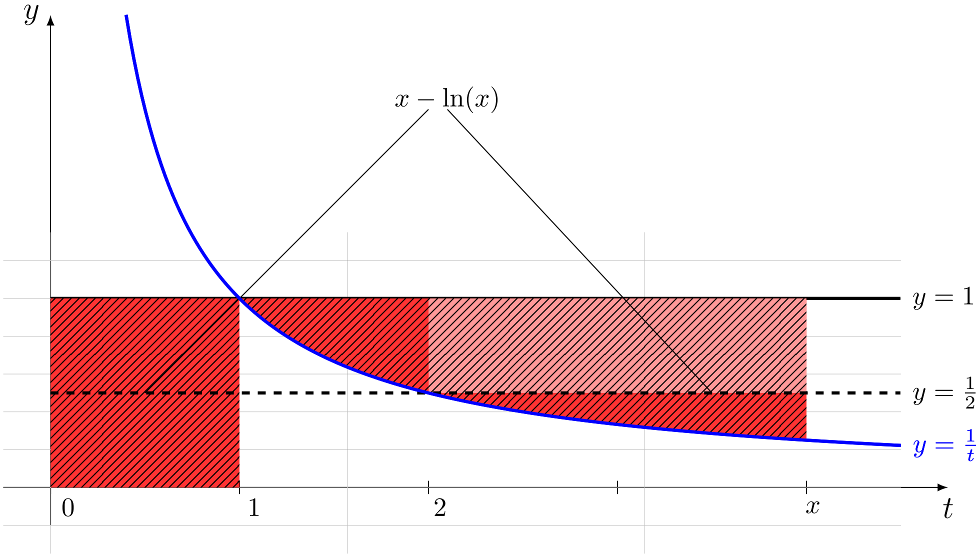
a) Les règles de calculs donnent

$$\lim_{x\to 0^+} [x - \ln(x)] = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

b) Les règles de calculs donnent

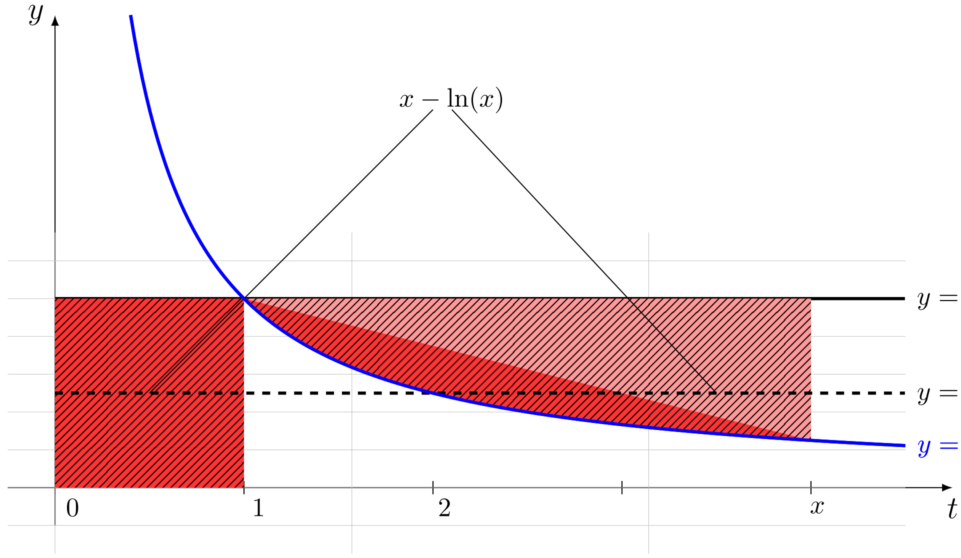
$$\lim_{x\to 0^+} [x^n - \ln(x)] = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

c) Le logarithme $\ln(x)$ est défini comme la surface en-dessous de la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$, en partant de $t = 1$ jusqu'à x. Similairement, la valeur x peut être vue comme la surface en dessous de $y = 1$, en partant de $t = 0$ et en s'arrêtant à $t = x$. Ainsi, $x - \ln(x)$ est la surface formée de la différence de ces deux surfaces (représentée par les parties hachurées sur le dessin) :



Si x augmente, $x - \ln(x)$ augmente. On peut l'observer en remarquant que la surface donnée par $x - \ln(x)$ contient la surface donnée par $\frac{1}{2}(x-2)$(représentée par le rectangle hachuré rose). On a $0 < \frac{1}{2}(x-2) \leq x - \ln(x)$ pour $x \geq 2$. Ainsi, par la règle du gendarme $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(x)) = +\infty$.

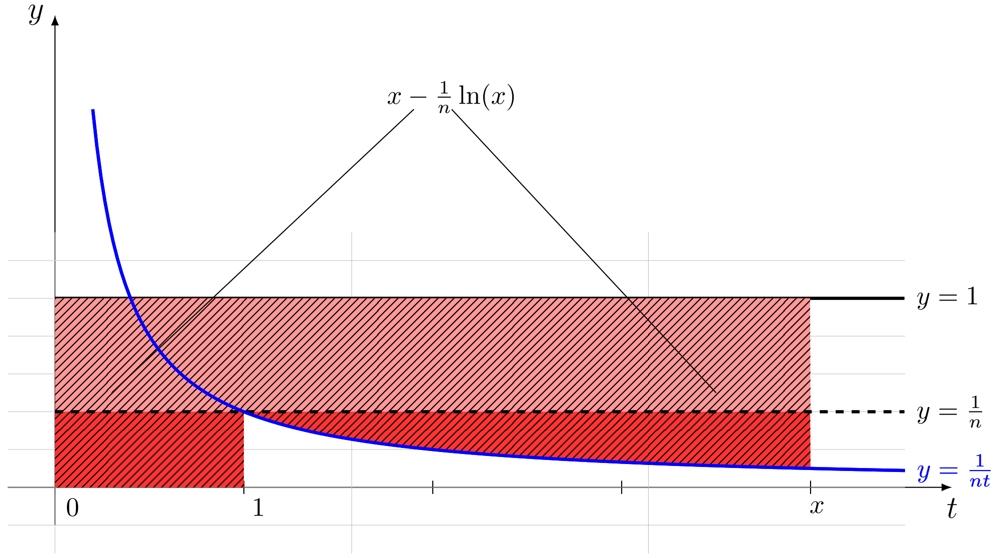
Remarque : il est possible de comparer $x - \ln(x)$ à une autre figure géométrique pour obtenir le résultat. Par exemple, on peut choisir le triangle de sommet $(1, 1), (x, \frac{1}{x}), (x, 1)$ qui est contenu également dans la surface hachurée en rouge. On a alors la comparaison $\frac{1}{2}(x-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq x - \ln(x)$ qui conduit au même résultat par utilisation de la règle du gendarme.



d) En remplaçant x^n par y, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n - \ln(x)) = \lim\limits_{y\to+\infty}(y - \frac{1}{n}\ln(y))$. Quitte à changer les lettres, cette expression revient à calculer

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \frac{1}{n}\ln(x)).$$

Géométriquement, l'expression $\frac{1}{n}\ln(x)$ donne l'aire sous la courbe $\frac{1}{nt}$ entre $t = 1$ et $t = x$ et l'expression x donne l'aire sous la courbe $y = 1$ entre $t = 0$ et $t = x$. Leur différence $x - \frac{1}{n}\ln(x)$ décrit donc la différence de ces surfaces, représentée par la partie hachurée sur le dessin ci-dessous.

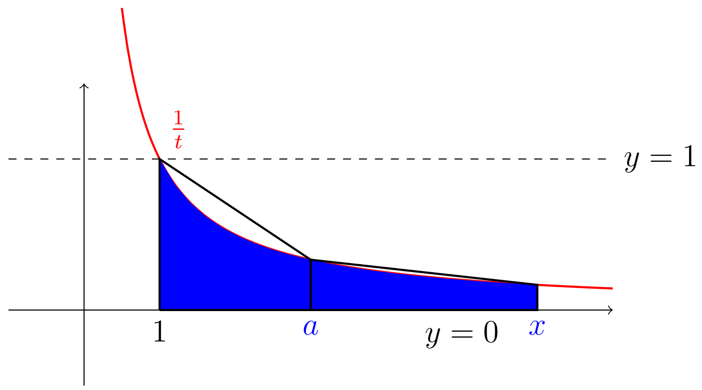


Si x augmente, $x - \frac{1}{n}\ln(x)$ augmente. Ceci s'observe en remarquant que la partie hachurée rose sur le dessin est donnée par $(1-\frac{1}{n})x$ et que $0 < (1-\frac{1}{n})\,x \leq x - \frac{1}{n}\ln(x)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \dfrac{1}{n}\ln(x)) = +\infty$.

9. Calculer la limite suivante en utilisant la définition géométrique du logarithme :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}.$$

Indication : Comparer $\ln(x)$ à l'aire du polygone construit sur les trois abscisses 1, a et x pour tout $1 < a < x$.



Fixons un $a > 1$ et observons, que si $x > a$, la surface en dessous de $y = \frac{1}{t}$ est majorée par les surfaces des trapèzes de sommets $(1,0)$, $(a,0)$, $(a,1/a)$, $(1,1)$ et $(a,0)$, $(x,0)$, $(x,1/x)$, $(a,1/a)$.

On a donc pour $1 < a < x$ que

$$0 < \ln(x) < \frac{1+\frac{1}{a}}{2}\cdot(a-1) + \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}{2}\cdot(x-a).$$

D'où

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{1+\frac{1}{a}}{2}\cdot\frac{a-1}{x} + \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}{2}\cdot\frac{x-a}{x}.$$

En passant à la limite, on trouve que

$$\forall a > 1,\ 0 \le \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \le \frac{1}{2a}.$$

Par conséquent, puisque $a > 1$, on obtient au final que

$$\forall 0 < \varepsilon < 1,\ 0 \le \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \le \varepsilon.$$

Le seul nombre plus grand ou égal à zéro étant plus petit que n'importe quel nombre strictement positif étant le nombre zéro, on trouve finalement que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$
