

Corrigé 10

1. Pour chaque fonction f ci-dessous, donner le nombre dérivé $f'(x_0)$ pour tout $x_0 \in D_f$ en calculant la limite du rapport de Newton.

- a) $f(x) = \cos(x)$
 - b) $f(x) = \cot(x)$
 - c) $f(x) = \sin(2x)$
 - d) $f(x) = \sin(3x)$
 - e) $f(x) = \cos^3(x)$
 - f) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
-

On calcule les rapports de Newton en x_0 :

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_0} \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \\ &= -\sin(x_0) \cdot 1 = -\sin(x_0) \end{aligned}$$

où on a utilisé l'IPE du sinus

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

D'où on a $f'(x_0) = -\sin(x_0)$.

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cot(x) - \cot(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{\tan(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{\tan(x_0) - \tan(x)}{\tan(x) \tan(x_0)}}{x - x_0} \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tan(x) - \tan(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\tan(x) \tan(x_0)} \\ &= -\tan'(x_0) \cdot \frac{1}{\tan^2(x_0)} \\ &= \frac{-1 - \tan^2(x_0)}{\tan^2(x_0)} \\ &= -\cot^2(x_0) - 1 = \frac{-1}{\sin^2(x_0)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } f'(x_0) = -1 - \cot^2(x_0) = \frac{-1}{\sin^2(x_0)}.$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(2x) - \sin(2x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} 2 \frac{\cos\left(\frac{2x+2x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{2x-2x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x + x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= 2 \cos(2x_0) \cdot 1 = 2 \cos(2x_0)
\end{aligned}$$

D'où $f'(x_0) = 2 \cos(2x_0)$.

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(3x) - \sin(3x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} 2 \frac{\cos\left(\frac{3x+3x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{3x-3x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{3x+3x_0}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{3}{2}(x - x_0)\right)}{x - x_0} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{3x+3x_0}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{3}{2}(x - x_0)\right)}{\frac{3}{2}(x - x_0)} \\
&= 3 \cos(3x_0) \cdot 1 = 3 \cos(3x_0)
\end{aligned}$$

D'où $f'(x_0) = 3 \cos(3x_0)$.

e)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos^3(x) - \cos^3(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} \cdot (\cos^2(x) + \cos(x) \cos(x_0) + \cos^2(x_0)) \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (\cos^2(x) + \cos(x) \cos(x_0) + \cos^2(x_0)) \\
&= -\sin(x_0) \cdot 3 \cos^2(x_0)
\end{aligned}$$

D'où $f'(x_0) = -3 \cos^2(x_0) \sin(x_0)$.

f) On calcule

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{\frac{1}{\tan(y)} - \frac{1}{\tan(y_0)}}$$

où on a effectué le changement de variable :

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = y &\iff x = \frac{1}{\tan(y)}, \quad \arctan\left(\frac{1}{x_0}\right) = y_0 \iff x_0 = \frac{1}{\tan(y_0)} \\
y, y_0 &\in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\}, \quad x, x_0 \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

On calcule à présent

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{\frac{1}{\tan(y)} - \frac{1}{\tan(y_0)}} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{\frac{\tan(y_0) - \tan(y)}{\tan(y) \tan(y_0)}} = - \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\tan(y) \tan(y_0)}{\frac{\tan(y) - \tan(y_0)}{y - y_0}} \\ &= - \frac{\tan^2(y_0)}{\tan'(y_0)} = - \frac{\tan^2(y_0)}{1 + \tan^2(y_0)}.\end{aligned}$$

Finalement on aura donc

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x - x_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{\frac{1}{\tan(y)} - \frac{1}{\tan(y_0)}} \\ &= - \frac{\tan^2(y_0)}{1 + \tan^2(y_0)} = \frac{-1}{x_0^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x_0^2}} \\ &= \frac{-1}{x_0^2} \frac{x_0^2}{1 + x_0^2} = \frac{-1}{1 + x_0^2}.\end{aligned}$$

$$\text{D'où } f'(x_0) = \frac{-1}{1 + x_0^2}.$$

2. Pour chaque paire de fonctions f et g ci-dessous, montrer que f et g sont des IPE autour de $x_0 = 0$.

- a) $f(x) = \arcsin(x)$ et $g(x) = x$
- b) $f(x) = \arccos(x) - \frac{\pi}{2}$ et $g(x) = -x$
- c) $f(x) = \arctan(\sin(x))$ et $g(x) = \sin(x)$

a) On a bien que $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. De plus on a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x) - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x) - \arcsin(0)}{x - 0} \\ &= \arcsin'(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0^2}} = 1.\end{aligned}$$

b) On a bien que $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos(x) - \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$. De plus on a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(x) - \frac{\pi}{2}}{-x} &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(x) - \arccos(0)}{x - 0} \\ &= - \arccos'(0) = - \frac{-1}{\sqrt{1 - 0^2}} = 1\end{aligned}$$

c) On a bien que $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(\sin(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$. De plus on a

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x))}{\sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x))}{x} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x)) - 0}{x - 0} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x)) - \arctan(\sin(0))}{x - 0} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x)) - \arctan(\sin(0))}{x - 0} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x)) - \arctan(\sin(0))}{\sin(x) - \sin(0)} \cdot \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x)) - \arctan(\sin(0))}{\sin(x) - \sin(0)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x)) - \arctan(\sin(0))}{\sin(x) - \sin(0)} \cdot \sin'(0) \cdot 1
 \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $y = \sin(x)$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x)) - \arctan(\sin(0))}{\sin(x) - \sin(0)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(y) - \arctan(0)}{y - 0} = \arctan'(0).$$

D'où finalement on a

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x))}{\sin(x)} &= \arctan'(\sin(0)) \cdot \sin'(0) \\
 &= \frac{1}{1 + \sin^2(0)} \cdot \cos(0) = \frac{1}{1 + 0} \cdot 1 = 1
 \end{aligned}$$

3. On considère les deux fonctions $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$ et $g(x) = \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$.

- Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point $(0, f(0))$.
- Donner l'équation de la tangente au graphe de g au point $(0, g(0))$.
- Montrer que ces deux droites sont orthogonales.

Indication : que vaut le produit des pentes ?

On rappelle que l'équation de la tangente au graphe d'une fonction f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

De plus, deux droites concourantes sont orthogonales si le produit de leur pentes vaut -1 .

a) L'équation de la tangente à G_f au point $(0, f(0)) = (0, \frac{\pi}{2})$ est donnée par

$$t_f : y = f(0) + f'(0)(x - 0) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arccot}'(0)x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+0^2} = \frac{\pi}{2} - x.$$

b) L'équation de la tangente à G_g au point $(0, g(0)) = (0, \frac{\pi}{2})$ est donnée par

$$t_g : y = g(0) + g'(0)(x - 0)$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) + \frac{\pi}{2} - \arctan(0) - \frac{\pi}{2}}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} \\ &= \arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1. \end{aligned}$$

D'où

$$t_g : \frac{\pi}{2} + x.$$

c) Le produit des pentes valant -1 , les deux tangentes sont bien orthogonales.

4. Donner l'équation de la droite normale au graphe de la fonction $f(x) = 3 \sin(2x)$ au point $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{3}{2}\right)$.

Indication : la droite normale à un graphe de fonction au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite perpendiculaire en ce point à la tangente au graphe.

On observe que

$$\left(\frac{\pi}{12}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{12}, f\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = A.$$

On commence par chercher la tangente à G_f au point A . Son équation est donnée par

$$t : y = f\left(\frac{\pi}{12}\right) + f'\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(x - \frac{\pi}{12}\right).$$

On calcule que $f'(x_0) = 6 \cos(2x_0)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 3 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(2x) - \sin(2x_0)}{x - x_0} \\ &= 3(\sin(2x_0))' \underbrace{\quad}_{\text{exercice 1}} = 3 \cdot 2 \cos(2x_0) = 6 \cos(2x_0). \end{aligned}$$

D'où $f' \left(\frac{\pi}{12} \right) = 3\sqrt{3}$ et l'équation de t est donnée par

$$t : y = \frac{3}{2} + 3\sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{12} \right).$$

La droite normale n au point A a pour pente $m_n = \frac{-1}{m_t}$ où m_t est la pente de la tangente t , comme les deux droites sont orthogonales. Son équation est donc

$$n : y = \frac{3}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(x - \frac{\pi}{12} \right).$$

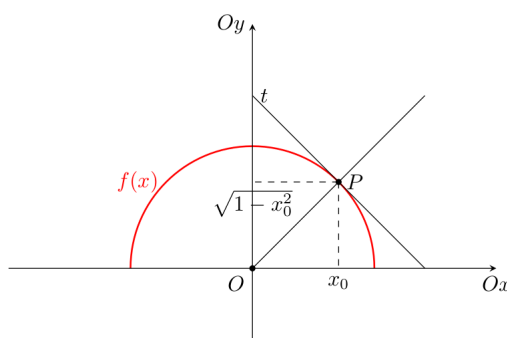
5. On décrit le demi-cercle supérieur du cercle trigonométrique comme le graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1].$$

En s'aidant d'un dessin, et sans calculer le nombre $f'(x_0)$, donner la pente de la tangente t au graphe G_f au point $(x_0, f(x_0))$ pour tout $x_0 \in]-1, 1[$. En déduire la valeur de $f'(x_0)$.

Indication : commencer par calculer la pente de la droite reliant l'origine au point $(x_0, f(x_0))$.

On représente la situation dans la figure ci-dessous :



La droite radiale OP est orthogonale à la tangente t au cercle au point $P = (x_0, \sqrt{1 - x_0^2})$. La pente de OP est par construction donné par

$$m = \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{x_0}.$$

Comme t et OP sont orthogonales, le produit de leur pentes vaut -1 et donc

$$m_t = \frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

Comme le nombre dérivé $f'(x_0)$ vaut la pente de la tangente au graphe d'une fonction f au point $(x_0, f(x_0))$, on trouve alors

$$f'(x_0) = m_t = \frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$
