1

Enseignant·es: Dubuis, Huruguen, Khukhro
Analyse 2 - CMS
10 janvier 2024
Durée : 105 minutes

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\,\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

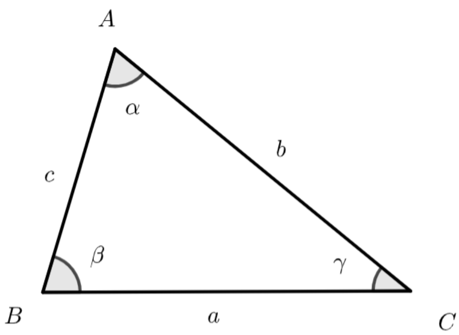
$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

Pour les **Questions 1, 2 et 3** on considère un triangle ABC comme ci-dessous dans le plan et on utilise les notations indiquées sur le dessin.



Question 1 (2 points)
Dans cette question on suppose que $a = 6$, $b = 2$ et $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Quelle est la valeur exacte de α ?

■ $\pi - \arcsin(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}})$ ☐ $\frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{1}{2\sqrt{7}})$ ☐ $\arcsin(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}})$ ☐ $\arccos(\frac{1}{2\sqrt{7}})$

Correction : On utilise le théorème du cosinus pour trouver c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \Longrightarrow c = \sqrt{28}$. Le théorème du sinus nous donne $\frac{6}{\sin(\alpha)} = \frac{\sqrt{28}}{\sin(\pi/3)} \Longrightarrow \sin(\alpha) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$. Ayant vérifié que $\cos(\alpha) < 0$ en utilisant le théorème du cosinus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$, on a donc $\alpha = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$.

Question 2 (1 point)
Si l'on a l'égalité $c = 2b$, laquelle des relations suivantes est certainement vérifiée ?

■ $\sin(\gamma) = 2\sin(\beta)$ ☐ $\cos(\gamma) = 2\cos(\beta)$
☐ $\sin(\gamma) = \frac{1}{2}\sin(\beta)$ ☐ $\cos(\gamma) = \frac{1}{2}\cos(\beta)$

Correction : Ceci découle du théorème du sinus: $\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{2b}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Longrightarrow \sin(\gamma) = 2\sin(\beta)$.

Question 3 (2 points)
Dans cette question on suppose que $a = 4$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ et $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Quelle est la valeur exacte de b ?

☐ $2\sqrt{3}$ ■ $\frac{2}{\sin(\frac{7\pi}{12})}$ ☐ $2\sin(\frac{5\pi}{12})$ ☐ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Correction : On trouve $\alpha = \pi - \beta - \gamma$ et on applique le théorème du sinus: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

Question 4 (2 points)
La solution de l'équation

$$\cos(x) = \frac{-1}{8}, x \in [-7\pi, -6\pi]$$

est donné par

- [x] $x = -\arcsin\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{13\pi}{2}.$
- [ ] $x = \arcsin\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{\pi}{2}.$
- [ ] $x = -\arcsin\left(\frac{1}{8}\right) - 7\pi.$
- [ ] $x = \arccos\left(\frac{-1}{8}\right) - 7\pi.$
- [ ] $x = \arccos\left(\frac{-1}{8}\right).$
- [ ] $x = \arcsin\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{13\pi}{2}.$

Correction : On résout puis on localise. Alternative : tester et localiser.

Question 5 (2 points)
La fonction $f : D \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \tan\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

est bijective pour quel choix d'ensemble de départ D ?

- [ ] $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- [ ] $D = \left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$
- [x] $D = \left]\frac{-\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right[$
- [ ] $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- [ ] $D = \left]\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$
- [ ] $D = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Correction : On vérifie que $\frac{-\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8} \iff \frac{-\pi}{2} < -2x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$*, qui est une détermination de* $\tan$.

Question 6 (3 points)
On définit A comme la surface délimitée par la courbe $y = \frac{x-1}{x-2}$, et les droites $x = 4$, $x = 5$, et $y = -1$.
Quelle est l'aire géométrique (positive, non signée) de la surface A ?

- ☐ $\ln(3) - \ln(2)$
- ☐ $1 + \ln(3) - \ln(2)$
- ☐ $1 + \ln(5) - \ln(4)$
- ☐ $1 + \ln(6) - \ln(5)$
- ☐ $\ln(5) - \ln(4)$
- ☐ $2 + \ln(5) - \ln(4)$
- ☐ $2 + \ln(6) - \ln(5)$
- ☐ $\ln(6) - \ln(5)$
- ☒ $2 + \ln(3) - \ln(2)$

Correction : On remarque que $\frac{x-1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$ et donc l'aire de A se décompose comme la somme de l'aire d'un rectangle 1×2 et l'aire sous le graphe de $\frac{1}{x}$ entre 2 et 3. Ainsi, on obtient l'aire $2 + \ln(3) - \ln(2)$.

Question 7 (3 points)
Trouver l'ensemble solution S de l'inéquation

$$4^x - 7 \cdot 2^x \leq -12.$$

- ☐ $S = [\log_2(7), \log_2(12)]$
- ☐ $S =]-\infty, \log_3(2)] \cup [2, +\infty[$
- ☐ $S = [1, +\infty[$
- ☐ $S = [3, 4]$
- ☒ $S = [\log_2(3), 2]$
- ☐ $S = [\log_3(2), 2]$
- ☐ $S = [\log_4(3), 3]$
- ☐ $S = \mathbb{R}$

Correction : En posant la substitution $y = 2^x$, on obtient l'inéquation $(y-3)(y-4) \leq 0$ qui a la solution $3 \leq y \leq 4$. On applique $\log_2$ pour obtenir la solution $\log_2(3) \leq x \leq \log_2(4) = 2$.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5

■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2\arccos(2x) + \arccos(3x + \frac{1}{2}) = \pi\,.$$

Solution Cherchons d'abord le domaine de définition :

$$\underbrace{-1 \leqslant 2x \leqslant 1}_{-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \underbrace{-1 \leqslant 3x + \frac{1}{2} \leqslant 1}_{-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{6}} \quad \Rightarrow \quad D_{\text{déf}} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}].$$

Posons $\alpha = \arccos(2x)$ et $\beta = \arccos(3x + \frac{1}{2})$. On obtient :

$$\begin{aligned}
2\alpha + \beta = \pi \quad & \Rightarrow \quad 2\alpha = \pi - \beta \\
& \Rightarrow \quad \cos(2\alpha) = \cos(\pi - \beta) \\
& \Rightarrow \quad 2\cos^2(\alpha) - 1 = -\cos(\beta) \\
& \Rightarrow \quad 2(2x)^2 - 1 = -3x - \frac{1}{2} \\
& \Rightarrow \quad 2(2x)^2 - 1 = -3x - \frac{1}{2} \\
& \Rightarrow \quad 8x^2 + 3x - \frac{1}{2} = 0 \\
& \Rightarrow \quad \underbrace{16x^2 + 6x - 1 = 0}_{\Delta=36+64=100=10^2} \\
& \Rightarrow \quad x = \frac{-6 \pm 10}{32} \\
& \Rightarrow \quad x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\}
\end{aligned}$$

Testons alors nos candidats. Pour $x = -\frac{1}{2}$ on trouve :

$$\alpha = \beta = \arccos(-1) = \pi \ \Rightarrow \ 2\alpha + \beta = 3\pi \neq \pi.$$

Cette solution est donc à rejeter . Pour $x = \frac{1}{8}$, on a :

$$\alpha = \arccos(\frac{1}{4}) \underbrace{\in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]}_{\text{car}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\geqslant\frac{1}{4}\geqslant 0} \quad \text{et} \quad \beta = \arccos(\frac{7}{8}) \underbrace{\in [0, \frac{\pi}{2}]}_{\text{car}\,\frac{7}{8}\geqslant 0}\,.$$

Les angles 2α et $\pi - \beta$ ont donc le même cosinus et appartiennent à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$: ils sont donc égaux . En résumé, l'équation étudiée possède une unique solution, à savoir $x = \frac{1}{8}$.

Question 9: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5

Résoudre par rapport à x l'inéquation suivante :

$$2\log_{\frac{2}{5}}\left(x-\frac{5}{2}\right) \leq -1-\log_{\frac{2}{5}}(10).$$

Solution

(a) Etape 1 : on détermine le domaine de définition. On doit imposer que $x-\dfrac{5}{2}>0$ d'où

$$D_{df}=\left]\frac{5}{2},+\infty\right[.$$

(b) Etape 2 : on manipule l'expression pour obtenir une inéquation du type $\log_{\frac{2}{5}}(u) \leq \log_{\frac{2}{5}}(v)$.

$$\begin{aligned} 2\log_{\frac{2}{5}}\left(x-\frac{5}{2}\right) \leq -1-\log_{\frac{2}{5}}(10) &\iff \log_{\frac{2}{5}}\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\right) \leq -\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{2}{5}\right)-\log_{\frac{2}{5}}(10) \\ &\iff \log_{\frac{2}{5}}\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\right) \leq \log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{5}{2}\right)+\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{10}\right) \\ &\iff \log_{\frac{2}{5}}\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\right) \leq \log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

(c) Etape 3 : on applique la décroissance de $\log_{\frac{2}{5}}$:

$$2\log_{\frac{2}{5}}\left(x-\frac{5}{2}\right) \leq -1-\log_{\frac{2}{5}}(10) \iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \iff x^2-5x+6 \geq 0.$$

(d) Etape 4 : on résout le trinôme

$$x^2-5x+6 \geq 0 \iff (x-2)(x-3) \geq 0 \iff x \in]-\infty,2] \cup [3,+\infty[.$$

(e) Etape 5 : on intersecte avec le domaine de définition et on trouve donc que l'ensemble solution est donné par

$$S=[3,+\infty[.$$