Enseignant·es: Bossoney, Dubuis, Khukhro
Analyse 2 - CMS
12 janvier 2023
Durée : 105 minutes

1

Corrigé

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\,\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
La solution de l'équation $\sin(x) = \frac{1}{3}, x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$, est

- ☐ $x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.
- ■ $x = -\pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.
- ☐ $x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{3\pi}{2}$.
- ☐ $x = -\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.

Correction : Les solutions générales sont données par $x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + k2\pi$ ou $x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + k2\pi$. Puis on applique la localisation. Alternative : localiser les réponses et vérifier l'équation.

Question 2 (2 points)
On définit A comme la surface délimitée par les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ d'équations

$$\Gamma_1 : y = \frac{1+|x|}{x}, x \neq 0, \quad \Gamma_2 : x = -2, \quad \Gamma_3 : x = -1, \quad \Gamma_4 : y = 0.$$

Quelle est l'aire géométrique (aire positive, non signée) de la surface A ?

- ☐ $2 - \ln(2)$
- ■ $1 + \ln(2)$
- ☐ $1 - \ln(2)$
- ☐ $\ln(2)$

Correction : On simplifie $\frac{1+|x|}{x} = \frac{1}{x} + \mathrm{sgn}(x)$. Comme on travaille dans une zone $x < 0$, la courbe est donc $\frac{1}{x} - 1$ et donc une translation vers le bas de 1. Par symétrie on identifie l'aire avec l'aire sous la courbe $\frac{1}{x} + 1$ pour x entre 1 et 2.

Question 3 (2 points)
La fonction $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ définie par $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ est bijective sur l'intervalle

- ☐ $\left[\frac{-7\pi}{9}, \frac{-4\pi}{9}\right]$
- ☐ $\left[\frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\right]$
- ■ $\left[\frac{43\pi}{18}, \frac{49\pi}{18}\right]$
- ☐ $\left[\frac{-11\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right]$

Correction : Si on note $g(x) = 3x - \frac{\pi}{6}$, on vérifie que l'image par g de $\left[\frac{43\pi}{18}, \frac{49\pi}{18}\right]$ est $[7\pi, 8\pi]$ qui est une détermination du cosinus.

Question 4 (2 points)
L'équation $2^{2x} - 2^x + 2^{3x} = 0, x \in \mathbb{R}$ possède

- ■ exactement une solution.
- □ exactement trois solutions.
- □ aucune solution.
- □ exactement deux solutions.

Correction : On pose le changement de variable $z = 2^x$ et on résout $z^2 - z + z^3 = z(z^2 + z - 1) = 0$ qui a trois solutions, dont une seule est strictement positive.

Question 5 (2 points)
La solution de l'équation $\cos(x) = \dfrac{3}{5}, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est

- □ $x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right)$.
- ■ $x = \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right)$.
- □ $x = -\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$.
- □ $x = \pi - \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

Correction : Résoudre l'équation puise transformer $\arccos(\frac{3}{5})$ en $\arcsin(\frac{4}{5})$. Alternative localiser les réponses et vérifier.

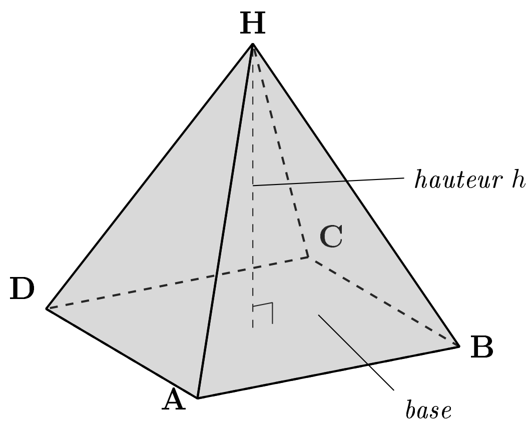
Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 6: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Soit la pyramide $ABCDH$ représentée ci-dessous.



On suppose que

- La base $ABCD$ est un carré.
- Les quatres arêtes AH, BH, CH, DH sont de même longueur $a > 0$.
- La mesure de l'angle $\widehat{AHB}$ vaut $\varphi > 0$.

(a) Calculer la longueur du côté du carré en fonction de a et φ.

(b) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AHC}$ en fonction de a et φ.

(c) Calculer la hauteur h de la pyramide en fonction de a et φ.

Solution

(a) Par le théorème du cosinus on obtient $AB^2 = b^2 = 2a^2 - 2a^2\cos(\varphi)$, d'où $b = \sqrt{2(1-\cos(\varphi))}a$.

(b) Par Pythagore, la diagonale $d = AC$ a donc une longueur de $d = \sqrt{1-\cos(\varphi)}2a$. Le théorème du cosinus appliqué au triangle ACH nous donne

$$d^2 = 2a^2 - 2a^2\cos(\theta), \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos(2\cos(\varphi) - 1).$$

(c) Une nouvelle application de pythagore appliquée au triangle ACH nous livre

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}} = \sqrt{\cos(\varphi)}a.$$

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

Déterminer le domaine de définition et résoudre l'équation suivante par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

$$2 \arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) + \arcsin\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Solution

- Domaine de définition :

$$-1 \leq 1\frac{x+1}{2} \leq 1 \text{ et } -1 \leq 1 - \frac{x^2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \text{ et } -2 \leq x \leq 2.$$

  D'où $D_{df} = [-2, 1]$.

- Localisation : on écrit $\alpha = \arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)$ et $\beta = \arcsin\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, et on considère $2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$. $\alpha \in [0, \pi]$ et $\beta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $2\alpha + \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ qui contient bien l'angle $\frac{3\pi}{2}$ donc l'équation a un sens.

- On écrit $2\alpha = \frac{3\pi}{2} - \beta$ et on prend le cosinus des deux côtés. On obtient

$$\cos(2\alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\sin(\beta).$$

  Puisque que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, on obtient finalement :

$$2\cos^2(\alpha) - 1 = -\sin(\beta) \Leftrightarrow 2\frac{(x+1)^2}{4} - 1 = -1 + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \in D_{def}.$$

- On teste $\frac{-1}{2}$ dans l'équation, on doit avoir

$$2 \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

  On localise précisément les angles : $\arccos\left(\frac{1}{4}\right) \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ et $\arcsin\left(\frac{7}{8}\right) \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$, d'où

$$2 \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{7}{8}\right) \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$$

  et donc $\frac{-1}{2}$ n'est pas solution.

Question 8: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Déterminer le domaine de définition et résoudre l'inéquation suivante par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

$$\log_{\frac{1}{4}}(x) + \log_{\frac{1}{4}}(x-2) \leq 3 + 2\log_{\frac{1}{4}}(8\sqrt{2}).$$

Solution

- Domaine de définition : $x > 0$ et $x - 2 > 0$ d'où $D_{def} =]2, +\infty[$.
- Résolution :

$$\begin{aligned}
&\log_{\frac{1}{4}}(x) + \log_{\frac{1}{4}}(x-2) \leq 3 + 2\log_{\frac{1}{4}}(8\sqrt{2}) \\
&\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x(x-2)) \leq 3\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right) + \log_{\frac{1}{4}}(128) \\
&\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x(x-2)) \leq \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{64}\right) + \log_{\frac{1}{4}}(128) \\
&\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x(x-2)) \leq \log_{\frac{1}{4}}(2) \\
&\Leftrightarrow x(x-2) \geq 2 \\
&\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1-\sqrt{3}] \cup [1+\sqrt{3}, +\infty[.
\end{aligned}$$

- Intersection avec le domaine de définition : $S = [1 + \sqrt{3}, +\infty[$.