Enseignant·es: Dubuis, Huruguen, Khukhro
Analyse 2 - CMS
10 novembre 2023
Durée : 105 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\,\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soient $\alpha \in \left]\frac{55\pi}{6}, \frac{37\pi}{4}\right[$ et $P(\alpha)$ le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

Question 1 (1 point)
$P(\alpha)$ appartient au quadrant

- [ ] IV.
- [ ] I.
- [x] III.
- [ ] II.

Question 2 (1 point)
$P(3\alpha)$ appartient au quadrant

- [ ] II.
- [ ] III.
- [x] IV.
- [ ] I.

Question 3 (2 points)
Donner la valeur de l'angle x défini par $\cos(x) = \pm\frac{1}{2}$, $\sin(x) < 0$, $x \in \left]\frac{-15\pi}{2}, \frac{-13\pi}{2}\right[$.

- ☐ $x = \frac{22\pi}{3}$
- ■ $x = \frac{-20\pi}{3}$
- ☐ $x = \frac{-22\pi}{3}$
- ☐ $x = \frac{20\pi}{3}$

Correction : On localise l'angle dans le quadran III.

Question 4 (2 points)
Donner la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{199\pi}{3}\right)$.

- ☐ $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.
- ■ $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.
- ☐ $\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.
- ☐ $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.

Correction : L'expression vaut $\cos\left(\frac{1}{2}\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{(201-2)\pi}{3}\right)$ *.On utilise les formules de bissections pour le premier terme et la périodicité du sinus sur le second.*

Question 5 (3 points)
Résoudre pour $x \in [0, 2\pi]$ l'inéquation suivante :

$$\tan(2x) \leq 1.$$

L'ensemble solution S est

- [ ] la réunion de 6 intervalles disjoints.
- [ ] 1 unique intervalle.
- [ ] la réunion de 3 intervalles disjoints.
- [ ] la réunion de 2 intervalles disjoints.
- [x] la réunion de 5 intervalles disjoints.
- [ ] la réunion de 4 intervalles disjoints.

Correction : $S = [0, \frac{\pi}{8}] \cup]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}] \cup]\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{8}] \cup]\frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{8}] \cup]\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$.

Question 6 (3 points)
Résoudre pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ l'équation suivante :

$$\sin(x) = \cos(2x).$$

L'ensemble solution S contient exactement

- [ ] 2 solutions distinctes.
- [ ] 4 solutions distinctes.
- [ ] 1 solutions distinctes.
- [ ] 3 solutions distinctes.
- [x] 5 solutions distinctes.
- [ ] 6 solutions distinctes.

Correction : $S = \left\{\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right\}$.

Question 7 (2 points)
Soit à résoudre l'équation :

$$4\tan^2(x) - 3\cos(x) + 2\tan(x)\sin(x) = 26\,,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Quel est le changement de variable obtenu par application des tests de Bioche ?

- ☐ $z = \tan(\frac{x}{2})$
- ■ $z = \cos(x)$
- ☐ $z = \tan(x)$
- ☐ $z = \sin(x)$

Question 8 (2 points)
Soit à résoudre l'équation suivante :

$$\cos(x) + \sin(x) + \tan(x) = 1\,,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Quelle est l'équation en z obtenue par application des tests de Bioche ?

- ☐ $z^4 - z^3 + 2z = 0$
- ☐ $z^4 - z^3 + z = 0$
- ☐ $z^4 - z^2 + z = 0$
- ■ $z^4 - z^2 + 2z = 0$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 9: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Résoudre l'équation suivante pour $x \in [-2\pi, 2\pi]$:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{\sqrt{12}}{3}.$$

Solution

- Etape 1 : normalisation

  On divise l'équation par $\sqrt{1+\frac{3}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et on obtient :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1.$$

- Etape 2 : Résolution dans $\mathbb{R}$

  On a

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) &= 1\\
\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= 1\\
\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= 1\\
\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos(0)\\
\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos(0)
\end{aligned}$$

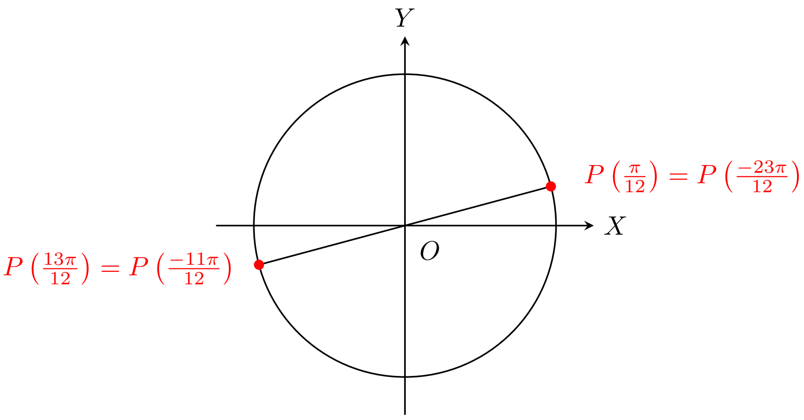
  Les solutions de l'équation sont données par

$$2x - \frac{\pi}{6} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

  d'où

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- Etape 3 : on filtre les solutions pour ne conserver que celles appartenant à $[-2\pi, 2\pi]$. L'intervalle décrivant deux tours du cercle trigonométrique et les solutions étant disposées sur le cercle tous les $k\pi$, on génère 2 points diamètralement opposés, chacun décrit avec un angle dans $[-2\pi, 0]$ et un angle dans $[0, 2\pi]$.



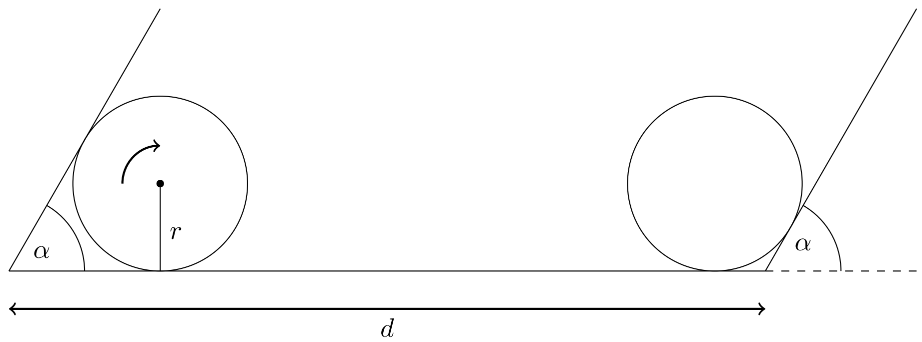
L'ensemble solution est donc

$$S = \left\{ \frac{-23\pi}{12}, \frac{-11\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12} \right\}.$$

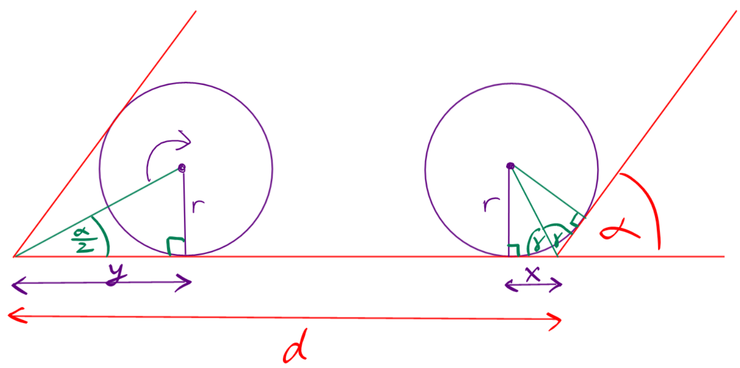
Question 10: *Cette question est notée sur 4 points.*

Une roue de rayon r est en contact avec un mur incliné d'un angle α par rapport au sol. La roue roule jusqu'à toucher un autre mur incliné du même angle. La distance entre les murs est d. En fonction de r, d et α, calculer l'angle β dont la roue aura tourné au moment d'entrer en contact avec le deuxième mur.

(Vous pouvez dessiner sur la figure ci-dessous si nécessaire.)



Solution



On a

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{y} \Longrightarrow y = \frac{r}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

On a aussi

$$\tan(\gamma) = \frac{r}{x} \Longrightarrow x = \frac{r}{\tan(\gamma)}.$$

De plus, $2\gamma + \alpha = \pi \Longrightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ et donc

$$x = \frac{r}{\tan(\gamma)} = \frac{r}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

La distance $d - x - y$ est égal à la longueur d'arc correspondant à l'angle de rotation β. On a donc

$$\beta = \frac{d-x-y}{r} = \frac{d}{r} - \frac{r}{r\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{r}{r\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{d}{r} - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$