EPFL

Enseignant·es: Bossoney, Dubuis, Khukhro
Analyse 2 - CMS
8 novembre 2022
Durée : 105 minutes

1

Dalton Joe

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\, \cos y + \cos x\, \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\, \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\,\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soient $\alpha \in \left[\frac{-75\pi}{4}, \frac{-56\pi}{3}\right]$ et $P(\alpha)$ le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

Question 1 (2 points)
$P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ appartient au quadrant

- [ ] IV.
- [ ] I.
- [ ] III.
- [x] II.

Question 2 (2 points)
$P(\alpha)$ appartient au quadrant

- [ ] II.
- [x] III.
- [ ] IV.
- [ ] I.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

On considère l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\sin(3x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} + 2\cos(x)\cot(x) - \frac{1}{\cos^2(x)} = 0.$$

Question 3 (2 points)
Pour quel test de Bioche l'équation est-elle invariante ?

- ☐ On remplace x par $\pi + x$.
- ■ On remplace x par $\pi - x$.
- ☐ On remplace x par $-x$.
- ☐ Aucune de ces possibilités.

Question 4 (1 point)
Le domaine de définition de l'équation est donné par

- ☐ $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- ☐ $\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- ☐ $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- ■ $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Question 5 (2 points)

Calculer la valeur de $\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)$.

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
- ■ $\frac{-1}{2}$
- ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Question 6 (2 points)

Calculer la valeur de $\tan(x)$ sachant que $\sin(x) = \pm\frac{4}{5}$ et $3\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$.

- ☐ $\tan(x) = \frac{-4}{3}$
- ☐ $\tan(x) = \frac{3}{4}$
- ■ $\tan(x) = \frac{4}{3}$
- ☐ $\tan(x) = \frac{-3}{4}$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

.5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4

Résoudre l'équation suivante par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \Big(\cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x)\Big)^2 = 0.$$

Solution

$$\begin{aligned}
&1 - \Big(\cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x)\Big)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \Big(1 - \Big(\cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x)\Big)\Big)\Big(1 + \Big(\cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x)\Big)\Big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\cos(3x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x)\right)\right)\left(1 + 2\left(\frac{1}{2}\cos(3x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x)\right)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \Big(1 - 2\cos(\frac{\pi}{3} + 3x)\Big)\Big(1 + 2\cos(\frac{\pi}{3} + 3x)\Big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{3} + 3x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos(\frac{\pi}{3} + 3x) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Les solutions sont donc données par :

$$\frac{\pi}{3} + 3x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } \frac{\pi}{3} + 3x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

D'où

$$S = \left\{k\frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Alternative : résoudre en utilisant les tests d'invariance de Bioche

- On pose d'abord $y = 3x$ et on résout $1 - (\cos(y) - \sqrt{3}\sin(y))^2 = 0$.
- L'équation est invariante par $\pi + y$ et on pose donc $z = \tan(y)$.
- On teste les solutions $\frac{\pi}{2} + k\pi$ et on vérifie que ça n'en est pas
- L'équation devient $1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} - \sqrt{3}\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2z^2+2\sqrt{3}z}{1+z^2} = 0$
- Les racines sont $z = 0$ ou $z = \sqrt{3}$
- On résout donc $\tan(y) = 0$ ou $\tan(y) = \sqrt{3}$ ce qui donne les solutions $y = k\pi$ ou $y = \frac{\pi}{3} + k\pi$.
- Les solutions finales sont donc $x = \frac{k\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$.

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

Résoudre l'inéquation suivante pour $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \geq 1.$$

Solution

- Domaine de définition : $2x - \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- Résolution pour $x \in \mathbb{R}$: on pose $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ et on résout $\tan(y) \geq 1$ Les solutions sont données par :

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq y < \frac{\pi}{2} + k\pi..$$

  On obtient alors

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \Leftrightarrow\ &\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- Résolution pour $x \in [-\pi, \pi]$:

$$S = \left[\frac{-5\pi}{8}, \frac{-\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{-\pi}{8}, 0\right[\cup \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi\right[$$

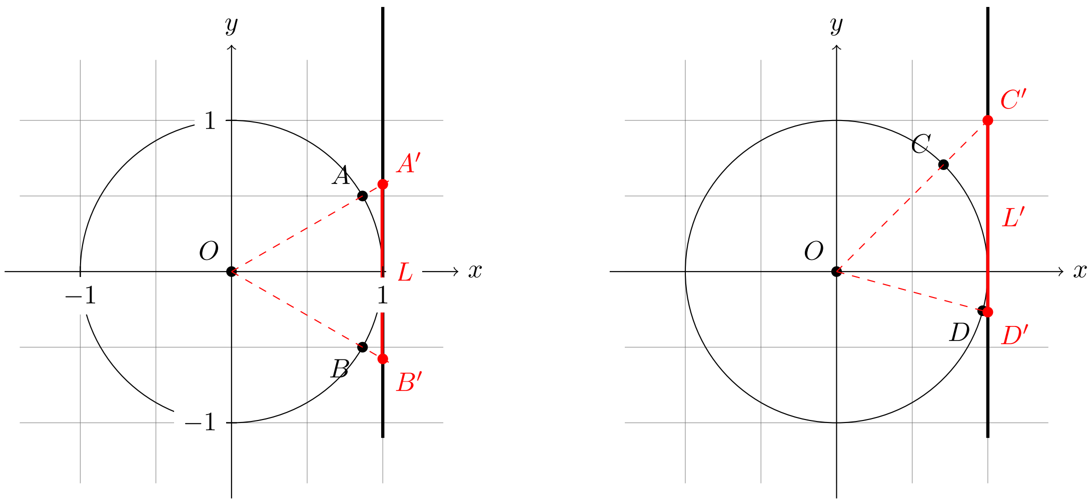
Question 9: *Cette question est notée sur 4 points.*

.5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4

On considère les deux figures suivantes.

- Sur la figure de gauche :
  - on donne les points $A\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right),\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ et $B\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right),\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$ sur le cercle trigonométrique ainsi que l'origine $O(0,0)$;
  - on considère les demi-droites OA et OB, et leur intersections A' et B' avec la droite verticale tangente au cercle en $(1,0)$.
- Sur la figure de droite, on fait tourner A et B d'un même angle x et on définit :
  - les points $C\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right),\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)$ et $D\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}+x\right),\sin\left(\frac{-\pi}{6}+x\right)\right)$;
  - les points C' et D' correspondants sur la droite tangente en $(1,0)$.
- On note finalement L la longueur du segment $A'B'$ et L' la longueur du segment $C'D'$.



Pour quelles valeurs de $x \in \left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[$ a-t-on $L' = 3L$?

Solution

- Calcul de L : $L = \tan(\frac{\pi}{6}) - \tan(\frac{-\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
- Calcul de L' :

$$L' = \tan(x+\frac{\pi}{6}) - \tan(x-\frac{\pi}{6}) = \frac{\tan(x)+\tan(\frac{\pi}{6})}{1-\tan(x)\tan(\frac{\pi}{6})} - \frac{\tan(x)-\tan(\frac{\pi}{6})}{1+\tan(x)\tan(\frac{\pi}{6})}$$
$$= \frac{\tan(x)+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\tan(x)\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{\tan(x)-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\tan(x)\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}\tan(x)+1}{\sqrt{3}-\tan(x)} - \frac{\sqrt{3}\tan(x)-1}{\sqrt{3}+\tan(x)}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}\tan^2(x)+2\sqrt{3}}{3-\tan^2(x)}.$$

- Résolution $L' = 3L$:

$$\frac{2\sqrt{3}\tan^2(x)+2\sqrt{3}}{3-\tan^2(x)} = 3L = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$
$$\Leftrightarrow \quad 6\tan^2(x)+6 = 18-6\tan^2(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \tan(x) = \pm 1.$$

- Résolution $\tan(x) = \pm 1$: $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.
- $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$: $x = \pm\frac{\pi}{4}$.